Universidade Federal do Espírito Santo – CCA UFES

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Agrárias – CCA UFES
Departamento de Computação

Lógica Nebulosa (Fuzzy)

Inteligência Artificial

Site: http://jeiks.net
E-mail: jacsonrcsilva@gmail.com

Tópicos

- Introdução;
- Relações de Pertinência;
- *Fuzzificação*;
- Variáveis Linguísticas;
- Operações com Conjuntos Nebulosos (*Fuzzy*);
- *Defuzzificação*;
- Referências.

Introdução

- A utilização da lógica é importante para automatizar o raciocínio em sistemas computacionais.
- Porém, a lógica convencional é **bivalente**, possuindo somente dois valores: verdadeiro e falso.
- Com essa bivalência, torna-se difícil representar problemas complexos.
- Exemplos:
  - Uma pessoa com 1,70m é alta, baixa, ou média?
  - Um calçado de R$ 100,00 é caro, ou barato?
  - Uma pessoa com 30 anos é nova, jovem ou velha?

Introdução

- Assim, a Lógica Nebulosa (ou difusa, ou *fuzzy*), propõe outra forma da utilização da lógica,
  - No lugar de dois valores únicos, utiliza valores <u>contínuos</u> de **zero** à **um**;
  - **Zero** representa a **completa falsidade**;
  - **Um** representa a **verdade absoluta**.
- Foi introduzida por Zadeh em 1965;
- É uma lógica **polivalente**, por possuir diversos valores contínuos;
- É uma lógica que permite trabalhar com valores de **indecisão**, já comuns às pessoas.

Relações de Pertinência

- A relação de pertinência refere-se à ligação existente entre um valor e um conjunto.
- Existe uma diferença entre as seguintes relações de pertinência:
  - Teoria Clássica dos Conjuntos
  - Teoria dos Conjuntos Nebulosos

Teoria Clássica dos Conjuntos

- Existem apenas duas possibilidades para um elemento em relação a um dado conjunto:
  - O elemento **pertence** ao conjunto (verdadeiro);
  - O elemento **não pertence** ao conjunto (falso).
- Essa é a relação de pertinência do elemento: pertencer ou não pertencer ao conjunto.

$$\mu_A(x) : U \rightarrow \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in A \\ 0 & se \quad x \notin A \end{cases}$$

- Assim, $\mu_A(x)$ significa o grau de pertinência do valor x no conjunto A.

Teoria dos Conjuntos Nebulosos

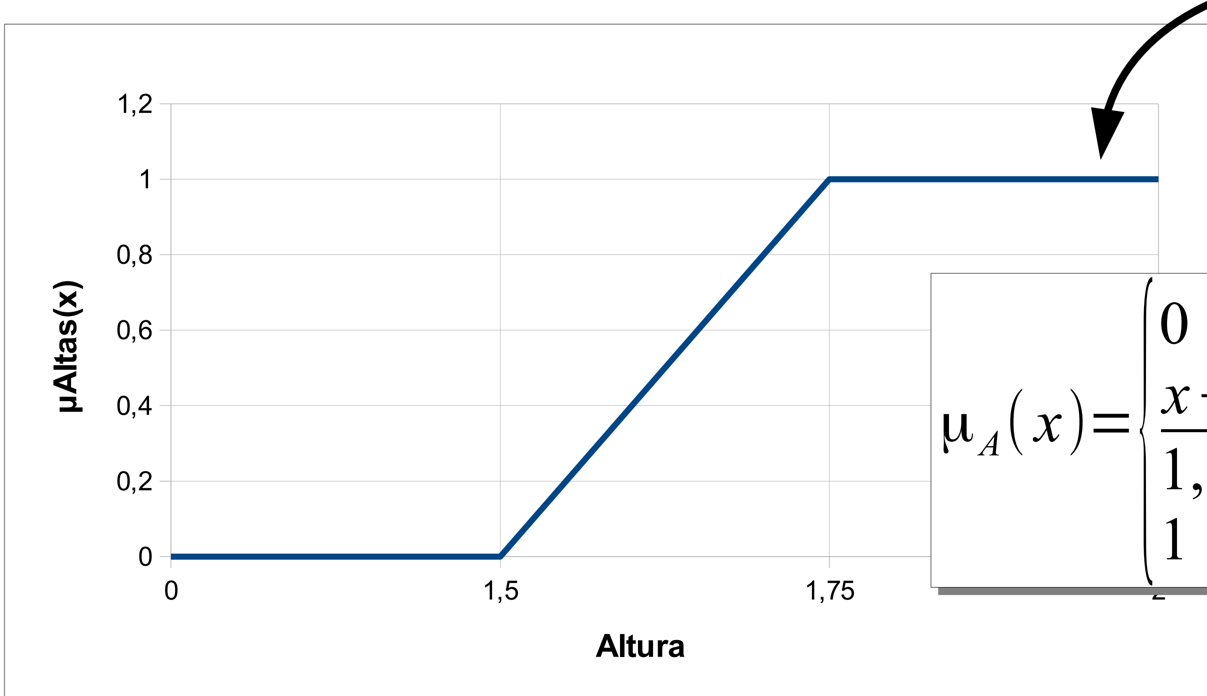
- Na Lógica Nebulosa:
  - Dado um conjunto universo *U*,
  - Dado um subconjunto nebuloso $A \subset U$,
  - *A* é definido por uma **função de pertinência** que associa a cada elemento $x \in U$, um grau $\mu_A(x)$ entre 0 e 1.

$$\mu_A(x) : U \rightarrow [0,1]$$

- Assim, $\mu_A(x) = 0{,}7$ significa que *x* pertence ao conjunto *A* com 70% de confiança.
- Obs.: o grau de confiança está relacionado com probabilidade, porém os conceitos Nebulosos não obedecem todas as leis da probabilidade.

Fuzzificação

- Para utilizar os valores absolutos em um sistema nebuloso, é necessário convertê-los.
- Essa conversão é denominada **fuzzificação**:
  - Transformação de um valor real em uma medida de imprecisão.
- Exemplo para pessoas Altas:



$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & se\; x<1{,}50 \\ \dfrac{x-1{,}50}{1{,}75-1{,}50} & se\; 1{,}50\le x\le 1{,}75 \\ 1 & se\; x>1{,}75 \end{cases}$$

Universidade Federal do Espírito Santo – CCA UFES

Variáveis Linguísticas

- É uma variável cujos valores são nomes de conjuntos nebulosos.
- Exemplos: Altura, Temperatura.
- Uma Variável Linguística assume valores, denominados **conjuntos nebulosos**.
- Assim,
  - Variável Linguística: Temperatura

    Valores (Conjuntos Nebulosos): baixa, média, alta;
  - Variável Linguística: Peso

    Valores (Conjuntos Nebulosos): magro, normal, gordo;

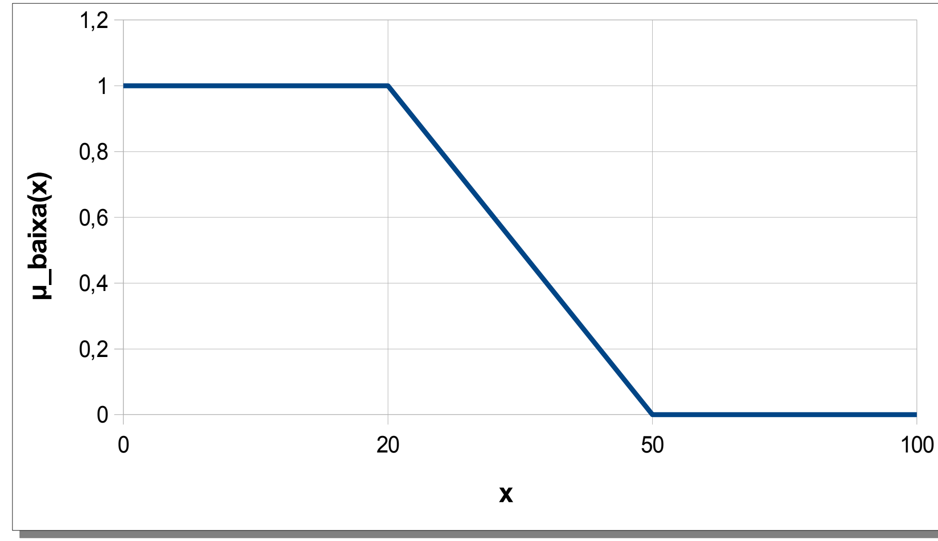
Universidade Federal do Espírito Santo – CCA UFES

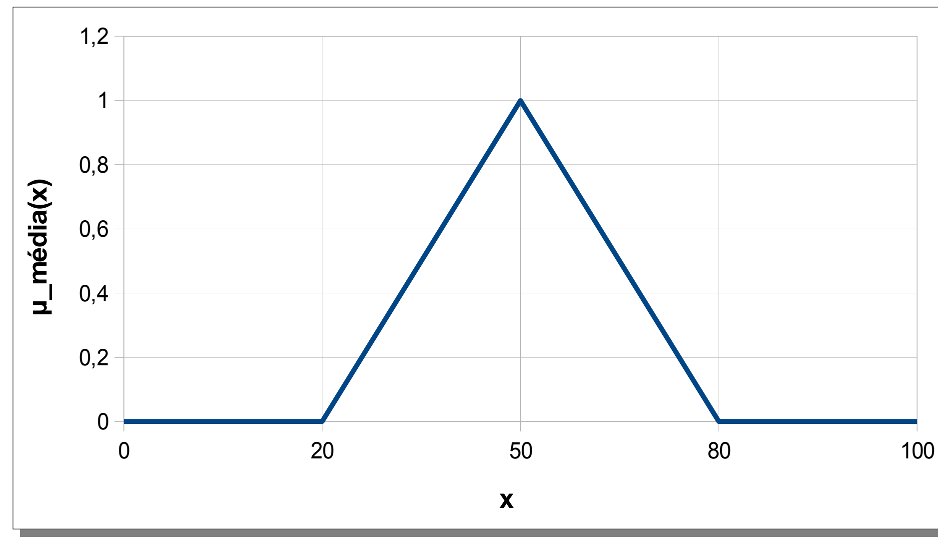
Curvas de Fuzzificação

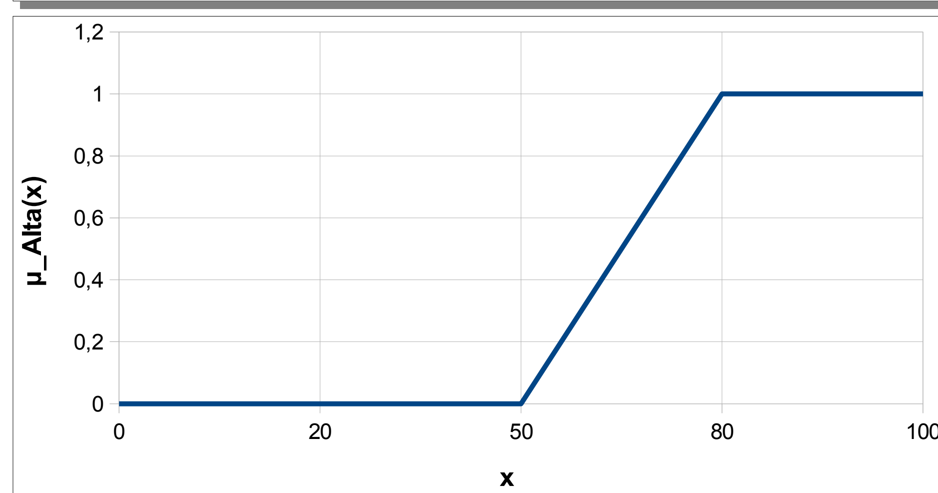
Temperatura

O valor absoluto de 75º graus teria os seguintes graus de pertinência:

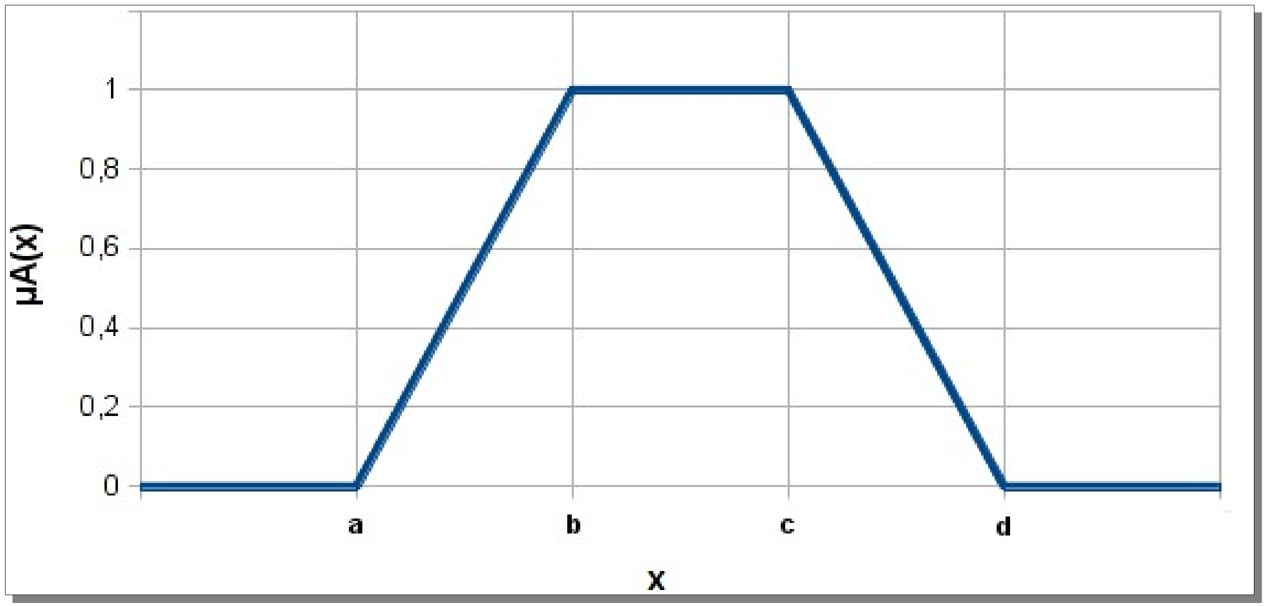
* $\mu_{baixa}(75º) = 0$;
* $\mu_{média}(75º) \cong 0,16$;
* $\mu_{alta}(75º) \cong 0,83$.







Curvas de Fuzzificação e suas Equações



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & se\, x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & se\, a \le x \le b \\ 1 & se\, b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & se\, c \le x \le d \\ 0 & se\, x > d \end{cases}$$

Operações com Conjuntos Fuzzy

- Complemento (Negação):

  $\neg\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$

- União (Disjunção – OU Lógico):

  $\mu_{A+B}(x) = \text{máximo} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$

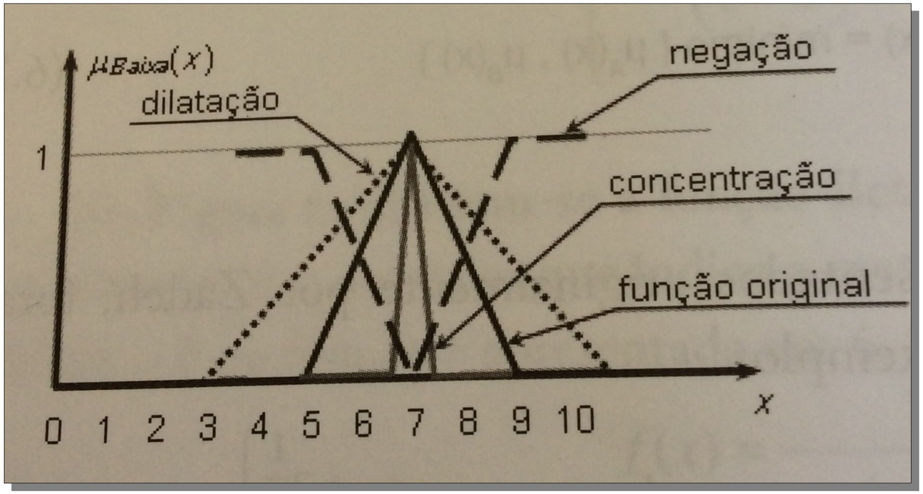
- Interseção (Conjunção – E Lógico):

  $\mu_{A.B}(x) = \text{mínimo} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

- Variações de operadores:
  - Além destes apresentados originalmente por Zadeh, foram propostos vários outros que podem ser encontrados na literatura.

Operações com Conjuntos Fuzzy

- Modificadores Linguísticos:
  - São transformações realizadas sobre os conjuntos nebulosos, objetivando modificar a função de pertinência do conjunto.



  - São utilizados para representar os conceitos:
    - *Muito*: [$\mu_A(x)$]²
    - *Pouco*: raiz_quadrada[$\mu_A(x)$]
    - *Extremamente*: [$\mu_A(x)$]³
    - etc.

Operações com Conjuntos Fuzzy

- Relações Nebulosas:
  - São as relações entre dois conjuntos nebulosos.
  - Inclusão:

    $A \subset B$ se $\mu_A(x) < \mu_B(x), \forall x \in U$
  - Equivalência:

    $A = B$ se $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U$
  - Desigualdade:

    $A \neq B$ se $\mu_A(x) \neq \mu_B(x), \forall x \in U$
- A representação também pode ser feita utilizando matrizes.

$R_1(U,V)$	0º C	25º C	50º C	75º C	100º C
Quente	0,0	0,25	0,50	0,75	1,0
Frio	1,0	0,75	0,50	0,25	0,0

Operações com Conjuntos Fuzzy

- Produto Cartesiano:
  - Dentre as diversas definições para o produto cartesiano entre dois conjuntos nebulosos $A \in U_1$ e $B \in U_2$. A sais simples é:

$$A \times B = \min\{ \mu_A(x) , \mu_B(x) \}$$

  - Diferindo da operação de interseção, essa operação gera um **pares** de valores e **não** um valor único.

Universidade Federal do Espírito Santo – CCA UFES

Operações com Conjuntos Fuzzy

- Composição com o Produto Cartesiano:
  - Os problemas reais envolvem a composição de relações entre conjuntos universos;
  - O mais usual é realizar esta composição através de uma sequência de operações de máximo/mínimo;
  - Para resolvê-las, pode ser utilizada uma notação matricial.
- Exemplo:

$R_2(U_2,U_3)$	Ventilador	Casaco	Guarda-chuva
Frio	**0,1**	0,9	0,6
Calor	**0,9**	0,1	0,4

$R_1(U_1,U_2)$	Frio	Calor
Primavera	**0,4**	**0,6**
Verão	0,0	1,0
Outono	0,6	0,4
Inverno	1,0	0,0

$R(U_1,U_3)$	Ventilador	Casaco	Guarda-chuva
Primavera	**0,6**	?	?
Verão	?	?	?
Outono	?	?	?
Inverno	?	?	?

μ(1;1) = max[min(0,4 ; 0,1) , min (0,6 ; 0,9)] = max[0,1 ; 0,6] = 0,6

Operações com Conjuntos Fuzzy

- Operador Condicional:
  - Na lógica clássica, o condicional "→" pode ser definido por:

    $a \rightarrow b \;\Leftrightarrow\; \sim a \lor b \;\Leftrightarrow\; \sim a + b$ *(disjunção e negação)*

    $a \rightarrow b \;\Leftrightarrow\; \sim(a \land \sim b) \Leftrightarrow \sim(a\,.\,\sim b)$ *(De Morgan)*

  - Na lógica nebulosa, tem-se:
    - $\mu_{a \rightarrow b} = \text{máximo}\{\, 1 - \mu_A(x),\, \mu_B(x) \,\}$ $(\sim a + b)$
    - $\mu_{a \rightarrow b} = 1 - \text{mínimo}\{\, \mu_A(x),\, 1 - \mu_B(x) \,\}$ $\sim(a\,.\,\sim b)$

Operações com Conjuntos Fuzzy

- Inferência Nebulosa:
  - A inferência é realizada usando regras de produção nas quais o antecedente e o consequente são conjuntos nebulosos.
  - Essas regras devem ser construídas com a ajuda de um especialista na área do problema a ser resolvido.
  - Essas regras também representam o conhecimento necessário para a tomada de decisões.
  - Exemplo de regra para um jóquei:

$$\textbf{SE} \ \{ \ \mu_{leve}(x) \ \ \textbf{E} \ \ \mu_{baixo}(x) \ \} \ \textbf{ENTÃO} \ \mu_{joquei}(x)$$

  - Também é possível combinar mais de duas premissas. Isso sempre depende do problema a se resolver.

Atividade

- Crie os conjuntos nebulosos *leve* e *baixo* para os valores da tabela abaixo.
- Após isso, *fuzzifique* estes valores para cada pessoa.
- Então, aplique a regra:

$$\textbf{SE}\ \{\ \mu_{leve}(x)\ \ \textbf{E}\ \ \mu_{baixo}(x)\ \}\ \textbf{ENTÃO}\ \mu_{joquei}(x)$$

- Lembre-se que:

A **E** $B \rightarrow C$, faz-se C = mínimo[A , B]

A **OU** $B \rightarrow C$, faz-se C = máximo[A , B]

Nome	Peso	Altura
Luis	100	1,90
José	95	1,50
Carlos	50	1,55

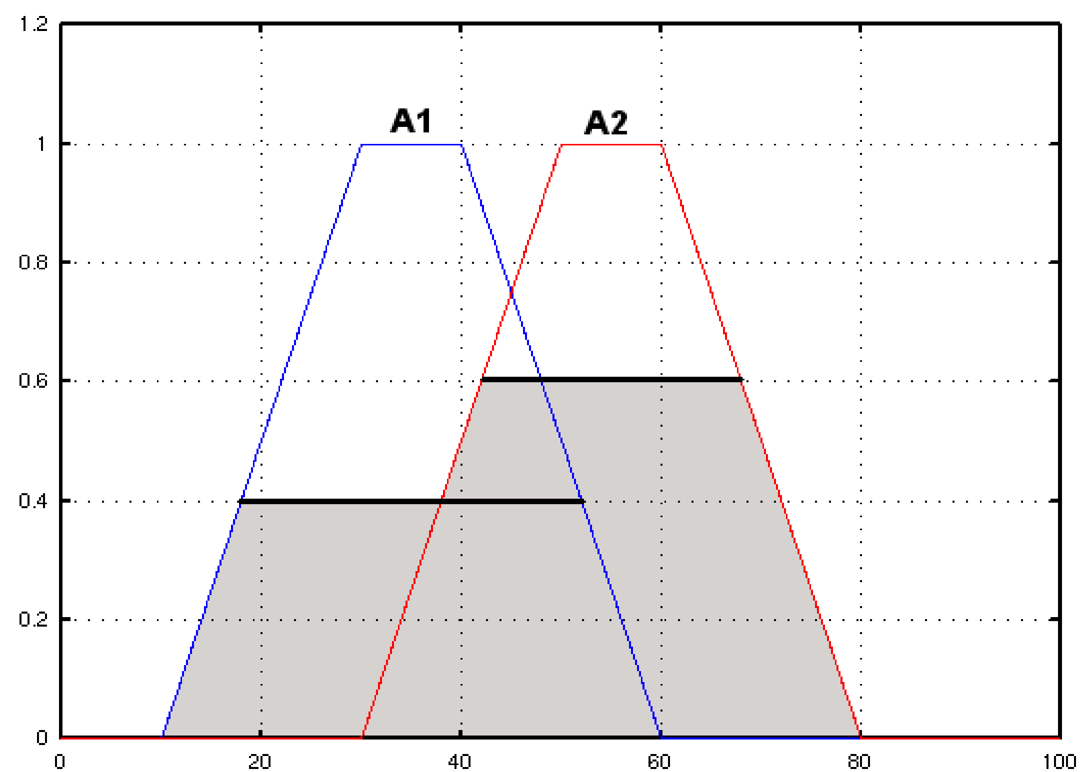
Defuzzificação

- É o processo contrário a fuzzificação,
  - Transforma um valor Nebuloso (fuzzy) em um valor real;
  - O valor real é a resposta desejada em um sistema real;
  - Novamente, o especialista deve ajudar na construção das curvas de saída da defuzzificação.
- Os métodos mais comuns são:
  - Método do Critério Máximo;
  - Método do Centro Geométrico;
  - Método da Média do Máximo.

Método do Critério Máximo

- É um dos mais simples métodos de defuzzificação;
- Sua saída é o valor correspondente ao conjunto que tem o maior grau de pertinência.
- Exemplo:
- Supondo que o resultado da defuzzificação seja x, então:
  - $\mu_{A1}(x) = 0,4$;
  - $\mu_{A2}(x) = 0,6$;

  Como max(0,4 ; 0,6), então o elemento pertence à classe A2.



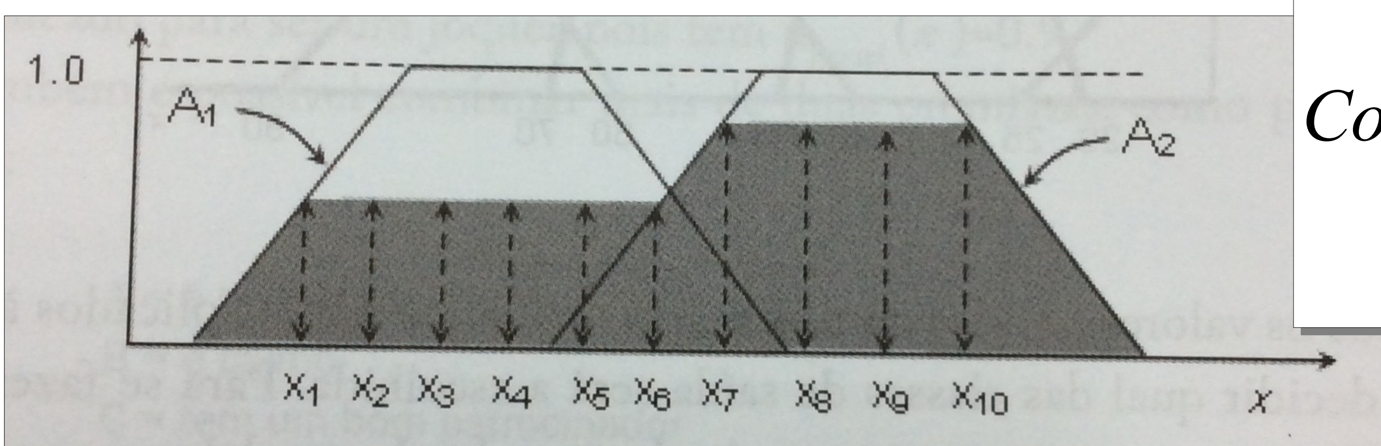
Método do Centro Geométrico

- Também é conhecido como centro de área de gravidade.
- É um dos métodos mais conhecidos e utilizados na etapa de defuzzificação.
- É dado por:

$$Cog = \frac{\sum x \mu_A(x)}{\sum \mu_A(x)}$$

Exemplo

- Supondo que tenhamos dois conjuntos: A1 e A2;
- Suponha que após realizar as inferências:
  - O maior valor obtido dentre as regras de A1 fosse 0,4; e
  - O maior valor obtido dentre as regras de A2 fosse 0,6.
- Ou seja,
  - Grau de pertinência do elemento no grupo A1 = 0,4;
  - Grau de pertinência do elemento no grupo A2 = 0,6.
- Então, é traçado um limiar nas curvas de defuzzificação e logo em seguida, calcula-se seu centro de gravidade:



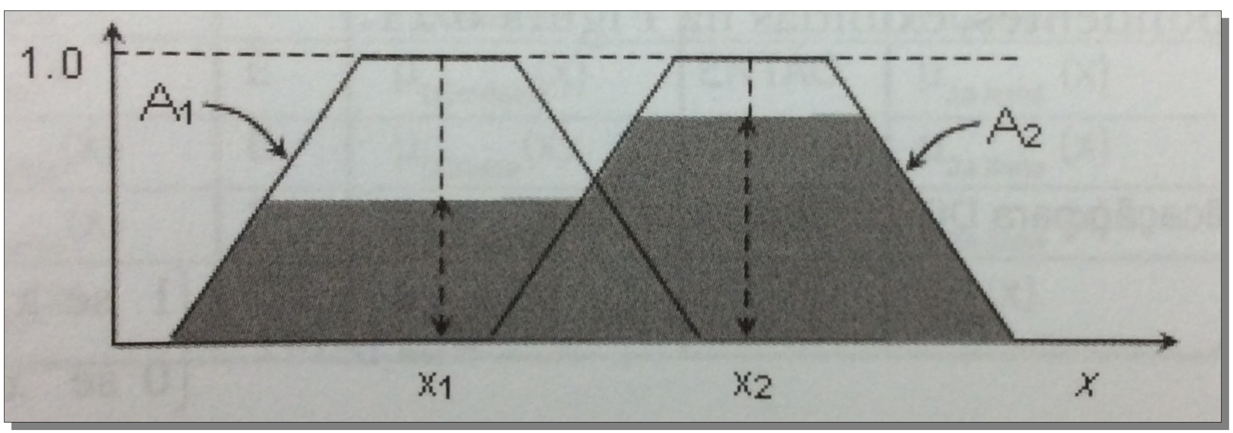
$$Cog = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i)\mu(x_i)}{\sum_{i=1}^{10} \mu(x_i)}$$

Método da Média do Máximo

- A classe de saída é determinada a partir do valor máximo entre os máximos de cada conjunto:

$$MOM = \frac{\sum_{i=1}^{n} max_{A\,i}\,\mu_{A\,i}(x)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_{A\,i}(x)}$$

Exemplo:



Assim, MOM = [x_1 . $\mu_{A1}(x_1)$ + x_2 . $\mu_{A2}(x_2)$] / (x_1 + x_2)

Referências

ARTERO, Almir Olivette. *Inteligência Artificial*: teoria e prática. Editora Livraria da Física: São Paulo, 2009.

BITTENCOURT, G. Inteligência Artificial – ferramentas e teorias. Editora da UFSC: Florianópolis, 1998.