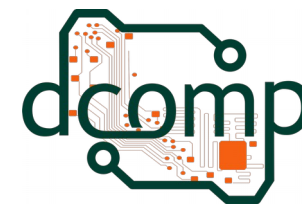




Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro de Ciências Agrárias – CCA UFES  
Departamento de Computação



# Sentenças Abertas

## **Lógica Computacional 1**

Site: <http://jeiks.net>

E-mail: [jacsonrcsilva@gmail.com](mailto:jacsonrcsilva@gmail.com)

# Sentença Aberta com uma Variável

- **Sentença aberta em A:**
  - Uma expressão  $p(x)$  tal que  $p(a)$  é Falsa ou Verdadeira para todo  $a \in A$ .
- Assim,  $p(x)$  é uma **sentença aberta em A** se e somente se:
  - $p(x)$  torna-se uma proposição todas as vezes que é substituído por qualquer elemento  $a$  do conjunto  $A$ .
  - Exemplos:
    - 1) Ela é bonita.
      - Nesse momento, essa frase **não** possui valor Verdadeiro ou Falso.
      - Porém, “Ela” pode ser substituída por um nome que fornecerá a esta frase um valor Verdadeiro ou Falso, tornando-a uma proposição.
    - 2)  $x + 1 > 8$ 
      - Da mesma forma,  $x$  pode ser substituído por um valor que formará uma proposição Falsa ou Verdadeira.

# Sentença Aberta com uma Variável

- O conjunto **A** recebe o nome de:
  - **Conjunto universo** da variável **x**; ou
  - **Universo** da variável **x**.
- Qualquer elemento **a**  $\in$  **A** diz-se:
  - Um valor da variável **x**.
- Se existe elemento de **A** que torna a proposição  $p(x)$  **verdadeira**, então diz-se que o elemento **satisfaz** ou **verifica**  $p(x)$ . Ex.:
  - O elemento 1 *satisfaz* a sentença aberta em  $\mathbb{N}$ :  $x + 1 = 2$
- Exemplos de sentenças abertas em  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ :
  - (a)  $x + 1 > 8$
  - (b)  $x^2 - 5x + 6 = 0$
  - (c)  $x + 5 = 9$
  - (d)  $x$  é primo.

# Sentença Aberta com uma Variável

- Também se chama:
  - Função proposicional com uma variável em  $A$ ; ou
  - Função proposicional em  $A$ ; ou ainda
  - Condição em  $A$ .

# Conjunto Verdade

- **Definição:**

- Chama-se **conjunto verdade** de uma sentença aberta  $p(x)$  em um conjunto  $A$ :

O conjunto de todos os elementos  $a \in A$  tais que  $p(a)$  é uma proposição verdadeira (V).

- O conjunto verdade é representado por  **$Vp$** .
- Tem-se simbolicamente:

$$Vp = \{x \mid x \in A \wedge p(x) \text{ é Verdadeiro}\}$$

ou, mais simplesmente:

$$Vp = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\} \quad \text{ou} \quad Vp = \{X \in A \mid p(x)\}$$

- Assim, sempre temos  $Vp \subset A$  ( $Vp$  é um subconjunto de  $A$ ).

# Exemplos

1) Seja a sentença aberta “ $x + 1 > 8$ ” em  $N$  (conjunto dos números Naturais).

O **conjunto verdade** é:

$$Vp = \{x \mid x \in N \wedge x + 1 > 8\} = \{8,9,10,\dots\} \subset N$$

2) O **conjunto verdade** da sentença aberta “ $x^2 - 2x > 0$ ” em  $Z$  (conjunto dos números Inteiros) é:

$$Vp = \{x \mid x \in Z \wedge x^2 - 2x > 0\} = Z - \{0,1,2\}$$

# Podem ocorrer três casos com Sentenças Abertas

1.  $p(x)$  exprime uma condição **universal** no conjunto  $A$ :  
Sentença aberta “ $x + 1 > x$ ” em  $N$ .  
 *$Vp = \text{ todos os elementos de } A, \text{ ou seja, } Vp = A.$*
2.  $p(x)$  exprime uma condição **possível** no conjunto  $A$ :  
Sentença aberta “ $x + 1 > 5$ ” em  $N$ .  
 *$Vp = \text{ alguns elementos de } a, \text{ ou seja, } Vp = \{5, 6, 7, \dots\} \subset A.$*
3.  $p(x)$  exprime uma condição **impossível** no conjunto  $A$ :  
Sentença aberta “ $x + 1 = x$ ” em  $N$ .  
 *$Vp = \text{ nenhum elemento de } A, \text{ ou seja, } Vp = \emptyset.$*

# Exercícios

- Determinar o conjunto verdade em  $\mathbb{N}$  (conjunto dos números naturais) de:
  - (a)  $1x = 6$
  - (b)  $x - 1 < 4$
  - (c)  $x^2 - 5x = 0$



# Sentenças abertas com duas variáveis

- **Definição:**

- Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , chama-se sentença aberta com duas variáveis  $A \times B$ ,  
uma expressão  $p(x,y)$  tal que  $P(a,b)$  é Falsa ou Verdadeira para todo par ordenado  $(a,b) \in A \times B$ .
- Ou seja:
- $p(x,y)$  é uma sentença aberta em  $A \times B$  se e somente se  $p(x,y)$  torna-se uma proposição todas as vezes que as variáveis  $x$  e  $y$  são substituídas pelos elementos  $a$  e  $b$  pertencentes ao produto cartesiano  $A \times B$  dos conjuntos  $A$  e  $B$ .

# Sentenças abertas com duas variáveis

- Se  $(a,b) \in A \times B$  é tal que  $p(a,b)$  é uma proposição verdadeira,  
diz-se que  $(a,b)$  **satisfaz** ou **verifica**  $p(x,y)$ .
- O **conjunto verdade** de uma sentença aberta  $p(x,y)$  em  $A \times B$  é  
o conjunto de todos os elementos  $(a,b) \in A \times B$  tais que  $p(a,b)$  é uma proposição Verdadeira.
  - Assim, temos:  
$$Vp = \{ (x,y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge p(x,y) \}$$
  - Ou simplesmente:  $Vp = \{ (x, y) \in A \times B \mid p(x,y) \}$

# Exemplos

- O **conjunto verdade** da sentença aberta “ $2x + y = 10$ ” em  $N \times N$ , sendo  $N$  o conjunto dos números naturais é:

$$\begin{aligned} Vp &= \{ (x,y) \mid x, y \in N \wedge 2x + y = 10 \} = \\ &= \{ (1,8), (2,6), (3,4), (4,2) \} \subset N \times N \end{aligned}$$

- Sejam os conjuntos  $A = \{1,2,3\}$  e  $B = \{3,4\}$ . O **conjunto verdade** da sentença aberta “ $x + 1 < y$ ” em  $A \times B$  é:

$$\begin{aligned} Vp &= \{ (x,y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x + 1 < y \} = \\ &= \{ (1,3), (1,4), (2,4) \} \subset A \times B \end{aligned}$$

# Exercícios

- Determinar o conjunto verdade da sentença aberta “ $x + y > 5$ ” em  $A \times B$ , sendo  $A = \{1,2,3\}$  e  $B = \{2,3,5\}$ .

# Sentenças abertas com N variáveis

- Considerando os  $n$  conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  e o seu produto cartesiano  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ .

A **sentença aberta** com  $n$  variáveis em  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  é uma expressão  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

tal que  $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$  é Falsa ou Verdadeira

para toda  $n$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

- Conjunto verdade:

$$Vp = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \wedge p(x_1, x_2, \dots, x_n) \}$$

# Exercícios

- Determine o conjunto verdade em  $A=\{1,2,3\}$ ,  $B=\{4,5,6\}$ ,  $C=\{10,20,30\}$  das seguintes sentenças abertas:
  - (a)  $10x = z \wedge 3 + x = y$
  - (b)  $x^2 = 4 \wedge 4y - 30 = z$