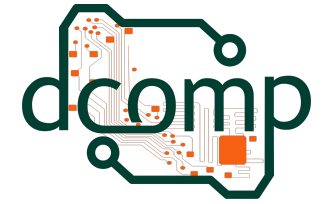




Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Agrárias – CCA UFES
Departamento de Computação



Equivalência Lógica

Lógica Computacional 1

Site: <http://jeiks.net>

E-mail: jacsonrcsilva@gmail.com

Equivalência Lógica

- **Definição**

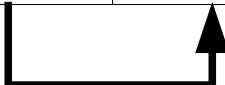
- Uma proposição $P(p,q,r,\dots)$ é **equivalente** a uma proposição $Q(p,q,r,\dots)$ se as tabelas verdade dessas duas proposições são idênticas.

- Notação:

$$P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$$

- Exemplo:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V



Obtém-se:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

Propriedades

- A relação da Equivalência Lógica possui as **propriedades**:

- **Reflexiva:**

$$P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\dots)$$

$$P \Leftrightarrow P$$

- **Simétrica:**

$$\text{Se } P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots), \text{ então } Q(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\dots)$$

$$\text{Se } P \Leftrightarrow Q, \text{ então } Q \Leftrightarrow P$$

- **Transitiva:**

$$\text{Se } P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots) \text{ e}$$

$$Q(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\dots), \text{ então } P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\dots)$$

$$\text{Se } P \Leftrightarrow Q \text{ e } Q \Leftrightarrow R, \text{ então } P \Leftrightarrow R$$

Exercícios

- Prove que as seguintes proposições são equivalentes:
 1. $p \text{ e } \neg \neg p$;
 2. $p \text{ e } \neg p \rightarrow p$;
 3. $p \rightarrow p \wedge q \text{ e } p \rightarrow q$; (Regra de absorção)
 4. $p \rightarrow q \text{ e } \neg p \vee q$;
 5. $p \leftrightarrow q \text{ e } (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$;
 6. $p \leftrightarrow q \text{ e } (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

Tautologias e Equivalência Lógica

$$P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$$

se e somente se

$$P(p,q,r,\dots) \leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$$

é tautológica.

- Demonstre isso para o item 4 do exercício anterior:

4. $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$;

Dica: faça mais uma coluna com a seguinte sentença:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$$

Tautologias e Equivalência Lógica

- Tem-se o **Corolário** (afirmação deduzida de uma verdade já demonstrada):

Se $\mathbf{P}(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow \mathbf{Q}(p,q,r,\dots)$,
então também é válido que

$$\mathbf{Q}(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow \mathbf{P}(p,q,r,\dots)$$

- Observe que:
 - \leftrightarrow indica uma operação lógica entre as proposições.
 - Ex.: das proposições \mathbf{p} e \mathbf{q} , dá-se a nova proposição $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$.
 - \Leftrightarrow indica uma relação.
 - Ex.: estabelece que a bicondicional $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$ é tautológica.

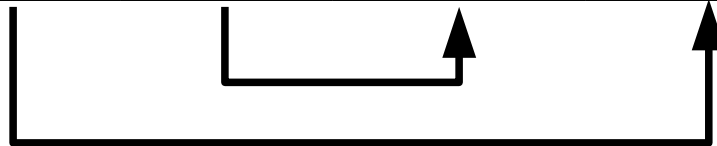
Exercícios

- Indique quais das seguintes proposições são equivalentes:
 1. $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$, onde $V(c) = F$
(Método de demonstração do absurdo)
 2. $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
(Regra de Exportação-Importação)
 3. $p \vee \sim q$ e $\sim(q \wedge p)$

Proposições associadas a uma condicional

- Dada a condicional $p \rightarrow q$, chamam-se proposições associadas a $p \rightarrow q$ (**direta**) as três seguintes proposições:
 - Proposição **recíproca** de $p \rightarrow q$: $q \rightarrow p$
 - Proposição **contrária** de $p \rightarrow q$: $\sim p \rightarrow \sim q$
 - Proposição **contrapositiva** de $p \rightarrow q$: $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V



São equivalentes:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$$

Exercícios

- A recíproca da seguinte sentença é Verdadeira ou Falsa (obs.: T é um triângulo)?
 $p \rightarrow q$: Se T é equilátero, então T é isósceles.
- Expresse a contrapositiva da seguinte sentença:
 $p \rightarrow q$: Se Carlos é professor, então é pobre.
- Qual a contrapositiva da condicional: “Se x é menor que zero, então x não é positivo”.
 p : x é menor que zero.
 q : x é positivo.
- Determine a contrapositiva da contrapositiva de $p \rightarrow q$.

Negação conjunta de duas proposições

- **Definição**

- Chama-se **negação conjunta** de duas proposições **p** e **q** a proposição “**não p e não q**”: $\neg p \wedge \neg q$.

- Outra notação: $p \downarrow q$

- Então: $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

- A proposição $p \downarrow q$ somente é verdadeira no caso em que **p** e **q** são falsas:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Negação disjunta de duas proposições

- **Definição**

- Chama-se **negação disjunta** de duas proposições **p** e **q** a proposição “**não p ou não q**”: $\neg p \vee \neg q$.

- Outra notação: $p \uparrow q$

- Então: $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

- A proposição $p \downarrow q$ somente é falsa no caso em que **p** e **q** são verdadeiras:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Os símbolos \downarrow e \uparrow são chamados de: “**conectivos de SCHEFFER**”