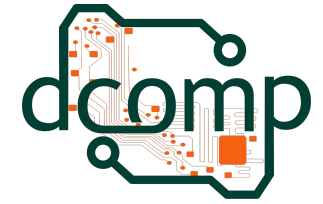




Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas, Naturais e da
Saúde – CCENS UFES
Departamento de Computação



Modelo de Hopfield

Redes Neurais Artificiais

Site: <http://jeiks.net>

E-mail: jacsonrcsilva@gmail.com

Memória Associativa

- Refere-se a:
 - Armazenar um conjunto de padrões de maneira que ao apresentar um novo padrão, a rede responderá com a produção do padrão armazenado mais próximo do novo padrão.
- Assim:
 - O Modelo de Memória Associativa trata a memorização de n padrões de $X^{(k)}$, $k=1, \dots, n$.
 - Na apresentação de $X^{(k)}$ como entrada ao sistema, ocorre a recuperação de $X^{(k)}$ (*Recall*).
 - Na apresentação de $X \approx X^{(k)}$ (padrão parecido), ocorre a recuperação de $X^{(k)}$, mesmo com perturbações, erros e incertezas, a informação original será recuperada.

Memória Associativa

- Como fazer em um computador convencional...
- Bastaria armazenar uma lista de padrões e escrever um problema que calculasse a distância de Hamming:

$$D_H(\underline{X}, \underline{X}^k) = \sum_{j=1}^H [X_j^{(k)} \cdot (1 - X_j) + (1 - X_j^{(k)}) \cdot X_j]$$

$$\text{um bit} \equiv H = 1 : a(1 - b) + (1 - a)b = a + b - 2ab$$

$$\text{então : } \begin{cases} 1, \text{ se } a = 1 \text{ e } b = 0 \text{ para } X_{ij} \\ 1, \text{ se } a = 0 \text{ e } b = 1 \text{ para } X_{ij} \\ 0, \text{ se } a = 0 \text{ e } b = 0 \text{ para } X_{ij} \\ 0, \text{ se } a = 1 \text{ e } b = 1 \text{ para } X_{ij} \end{cases}$$

Memória Associativa

Exemplos de utilização:

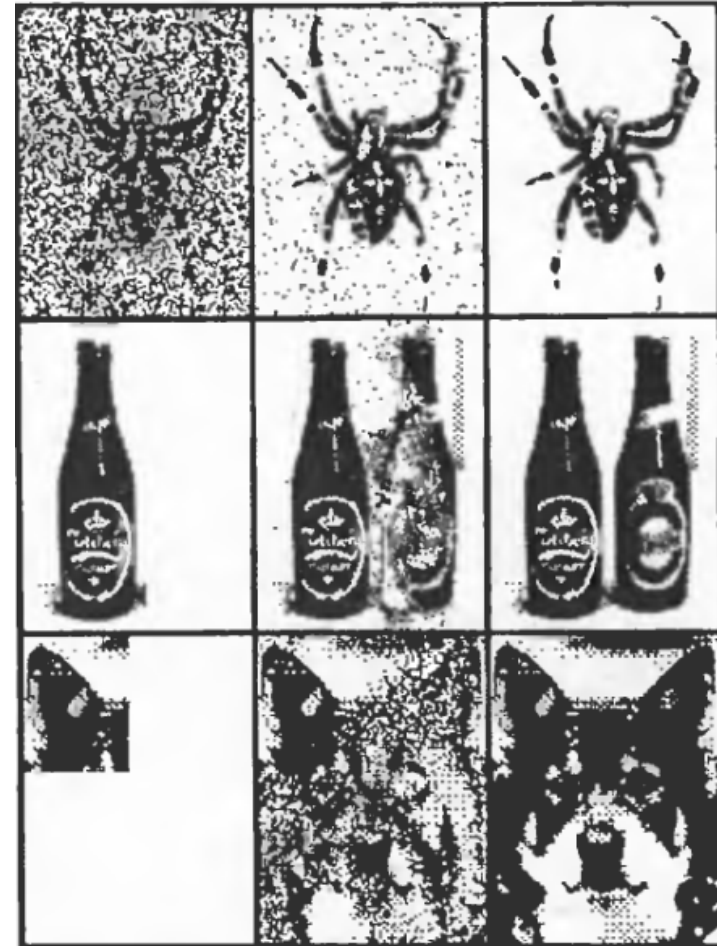
1. Se armazenássemos informações sobre cientistas em uma rede, então:

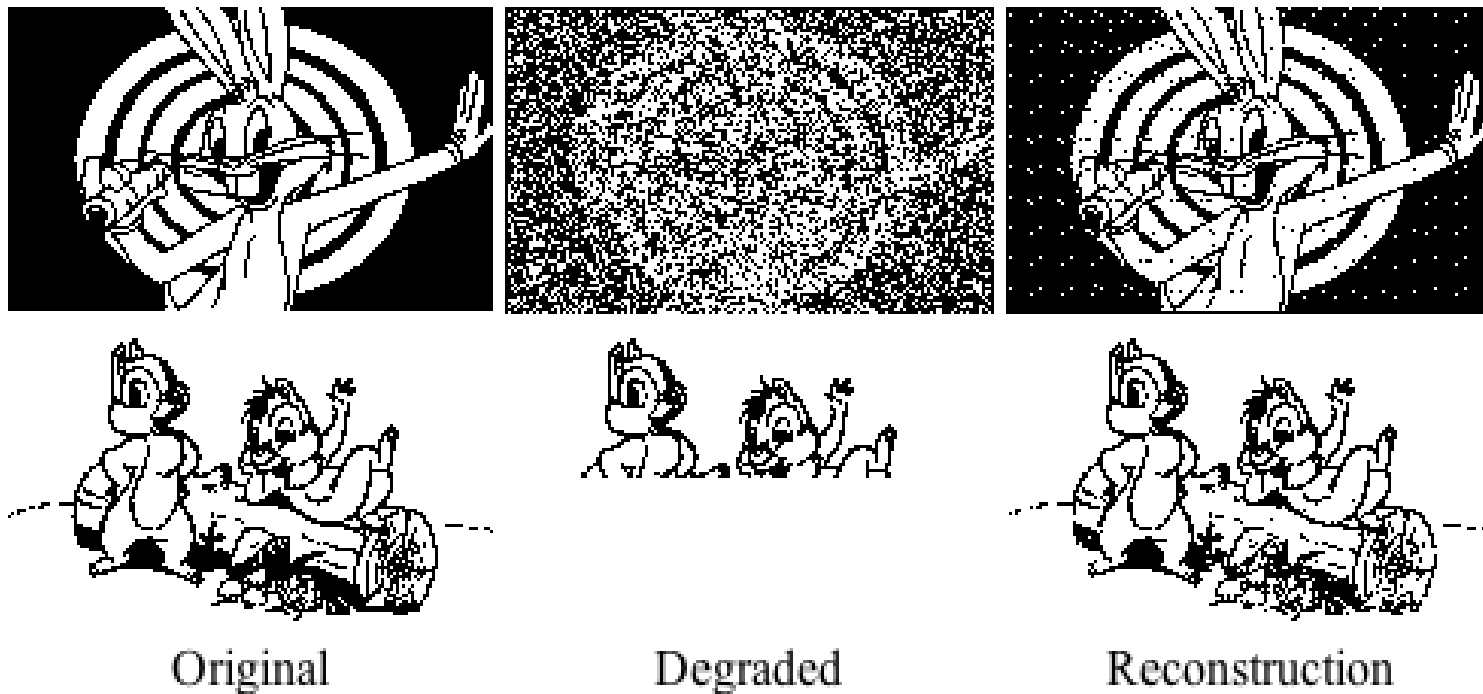
- O padrão “evolução” seria suficiente para retornar Darwin;
- O padrão “ $E = mc^3$ ” seria suficiente para retornar Einstein, mesmo estando errado.

Note que cada padrão sempre retornaria um dos valores memorizados.

2. Outro exemplo comum é o reconhecimento e a reconstrução de imagens:

- Ao apresentar uma parte da imagem, a imagem original seria retornada.

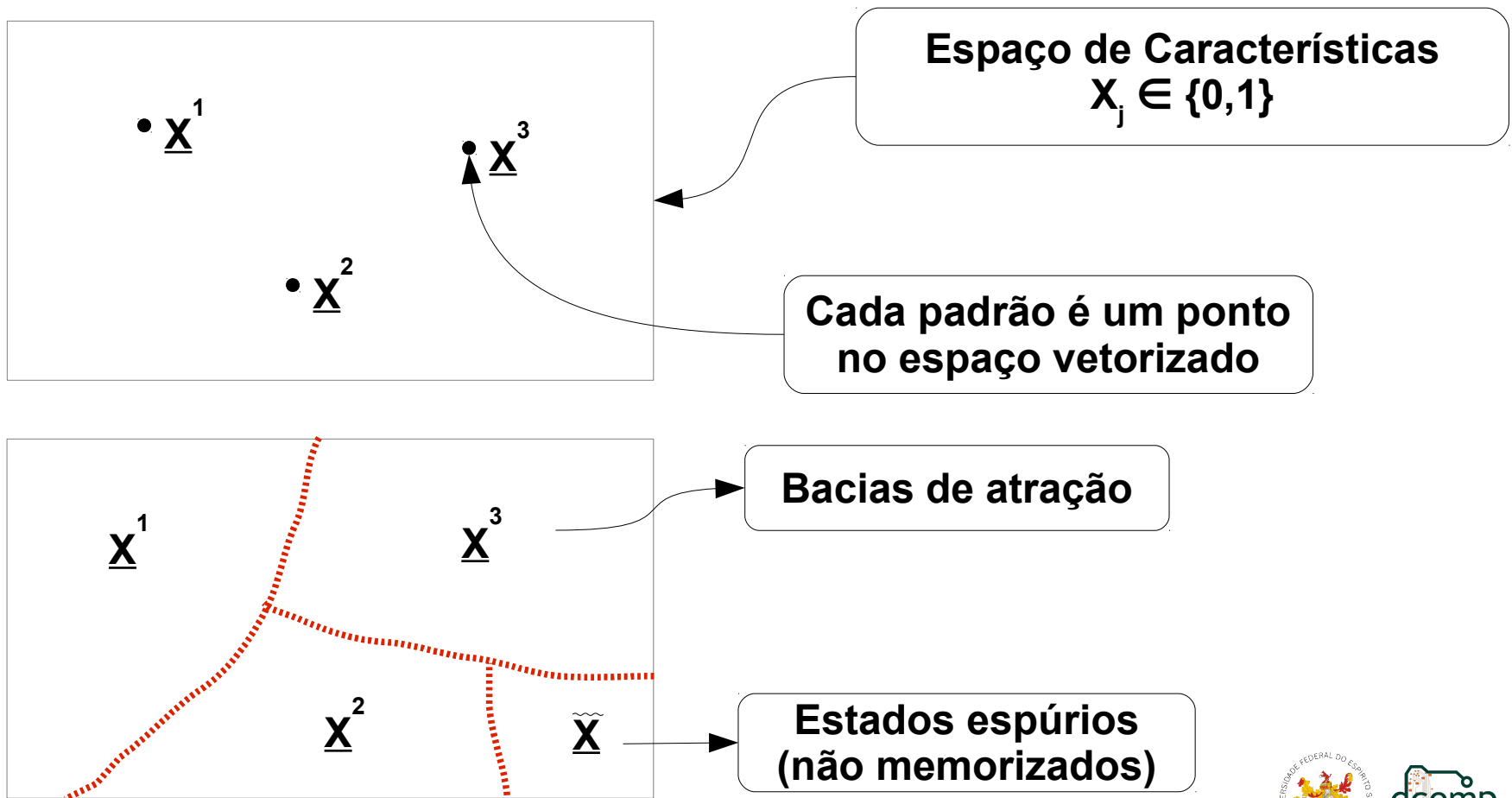




<<http://fourier.eng.hmc.edu/e161/lectures/nn/node5.html>>

Mapeamento de conteúdo

- Ocorre o armazenamento dos padrões por mapeamento de conteúdo (*Content-Addressable*).
- Ocorre a recuperação iterativa dos padrões memorizados.



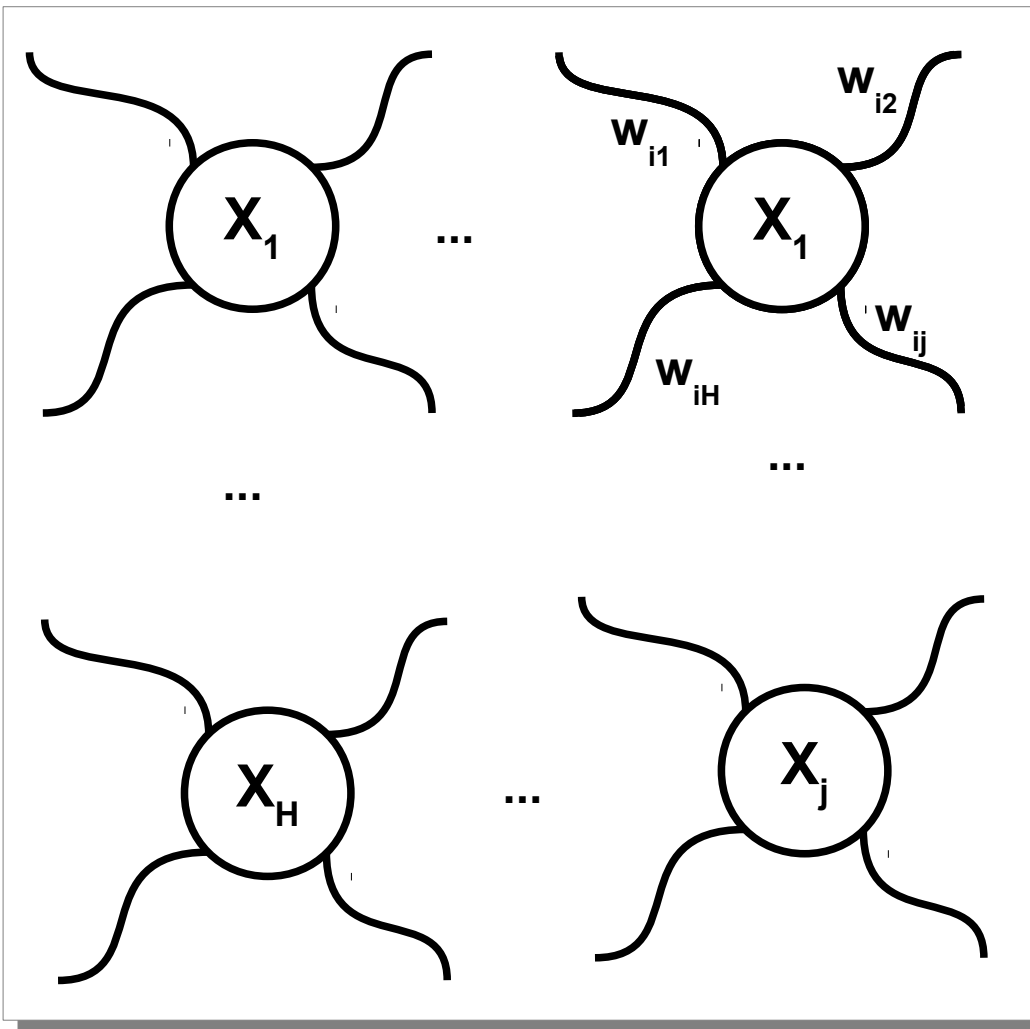
O Modelo de Hopfield

- Para conveniência matemática, ao invés de 1 (um) e 0 (zero), são utilizados os seguintes valores:
 - +1 (*firing* – disparando);
 - 1 (*not firing* – não disparando).
- Possuímos os neurônios:
 - $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_H)^T, x_j \in \{-1, 1\}$
- Função calculada de X_i :

$$X_i = \text{sgn} \left(\sum_{j=1}^H w_{ij} X_j - \mu_i \right), \mu_i = \text{bias}(\text{irrelevante})$$

O Modelo de Hopfield

Não há distinção entre neurônios de entrada, ocultos, ou de saída.



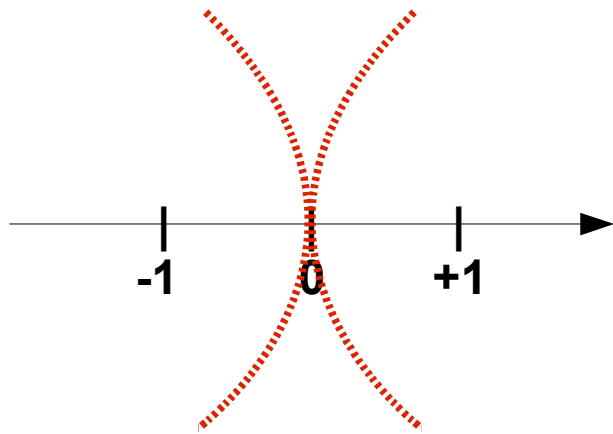
$$\text{Seja } \mu_i = 0 \text{ e } \underline{X}^{\text{velho}} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_i \\ X_j \\ X_H \end{pmatrix}$$

$$X_i^{\text{nov}} = \text{sgn}(\underline{w}_i \cdot \underline{X}^{\text{velho}}), i = 1, \dots, H$$

$$X_i^{\text{nov}} \in \{-1, 1\}, X^{\text{velho}} \in \{-1, 1\}$$

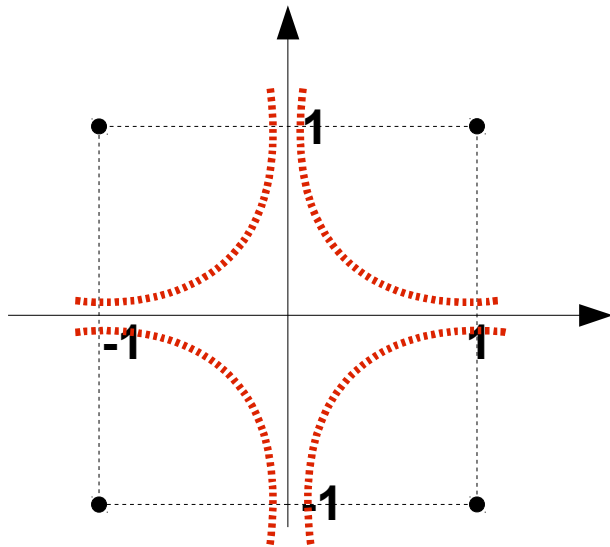
X_i é a entrada e a saída

Bacias de atração



$$H = 1$$

$$2 \text{ bacias} = 2^H = 2^1$$



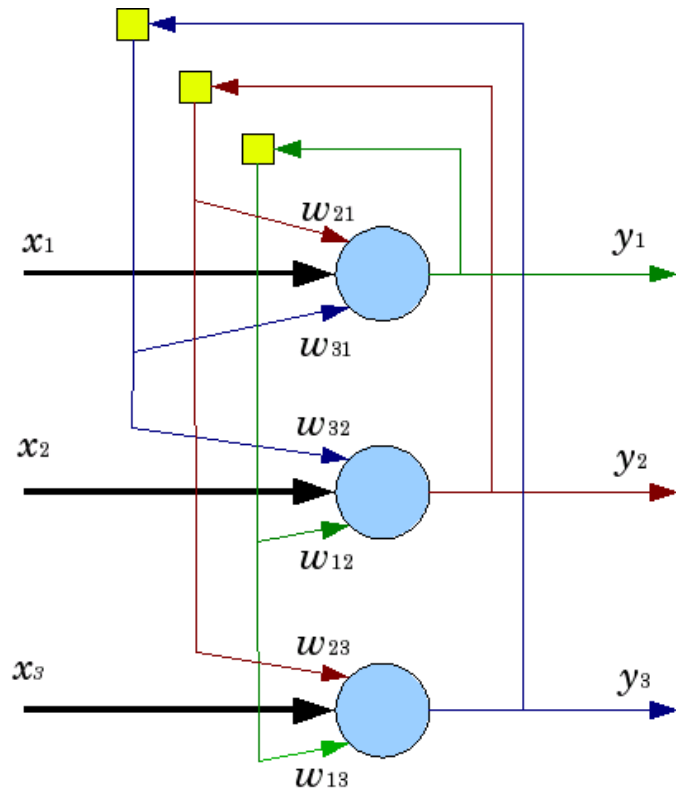
$$H = 2$$

$$4 \text{ bacias} = 2^H = 2^2$$

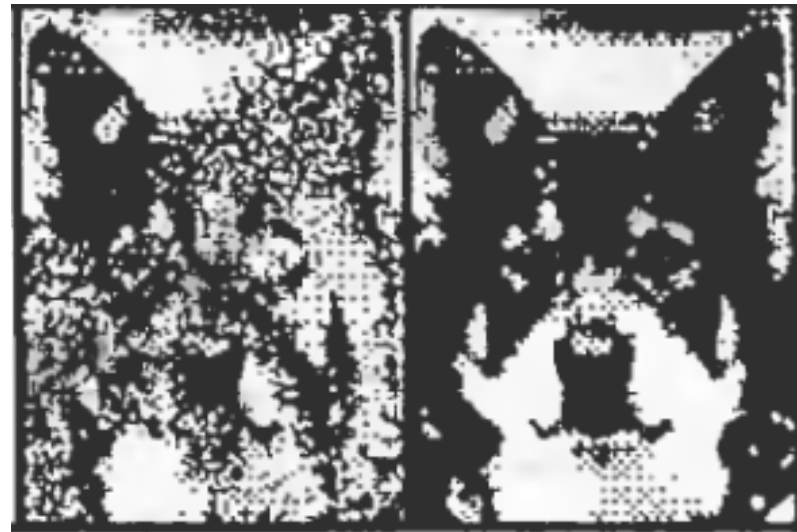
Sincronização de Consulta

- A atualização/sincronização é realizada na etapa de consulta.
 - Seu objetivo é obter o que foi memorizado anteriormente na rede.
- Existem duas formas de atualizar os valores dos neurônios para obter seu estado sobre determinada entrada:
 - Atualização Síncrona.
 - Atualização Assíncrona.

Rede de Hopfield



Cada pixel da imagem abaixo é um neurônio da rede, que apresenta seu estado: ativo (preto) ou inativo (branco).



- À esquerda, apresentamos a entrada da rede, ou seja, mudamos os valores de seus pixels, mas não mexemos em seus pesos.
- Em seguida, fazemos a sincronização dos pixels utilizando os pesos existentes.
- Assim, obtemos a imagem à direita.

Atualização Síncrona

PARA todos os X_i , $i=1, \dots, H$
fazer atualização simultânea
de todos neurônios

Atualização Assíncrona

REPITA até a rede estabilizar:

PARA $i=1, \dots, H$ em ordem aleatória

$$X_i^{\text{Novo}} = \text{sgn} (\underline{w} \cdot \underline{x})$$

FIM_PARA

FIM_REPITA

Atualização até o estado da rede estabilizar:

$$\underline{X}(t+1) = \underline{X}(t) \Leftrightarrow \underline{X}^{\text{Novo}} = \underline{X}$$

Algoritmo de Consulta Assíncrona

Estímulo inicial: $t=0$ $\underline{x}(0)$

Enquanto $x(t+1) \neq x(t)$:

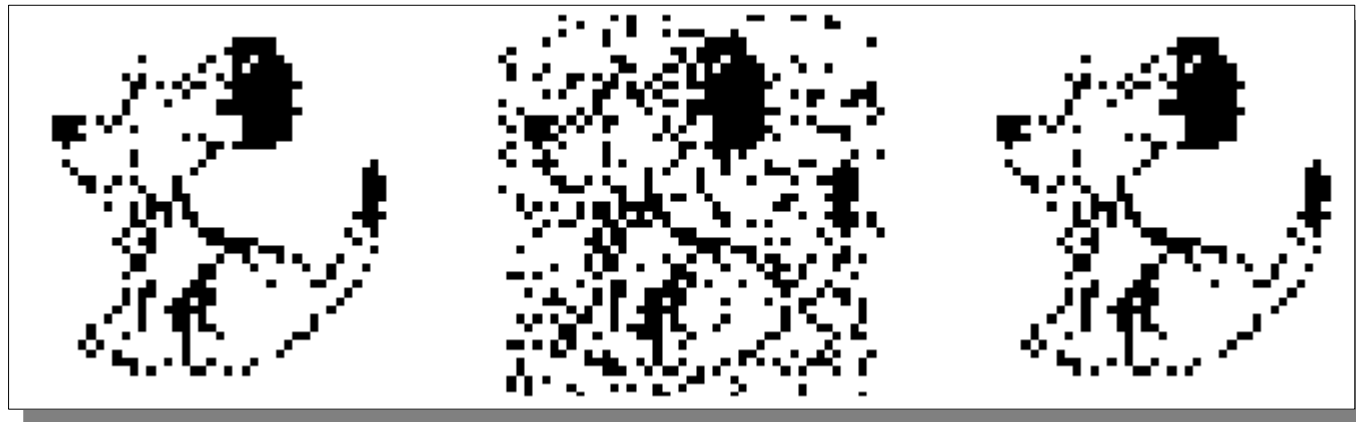
Para cada neurônio i ($i=1, \dots, H$)
em ordem aleatória:

$$x_i(t+1) = \text{sgn}(\underline{w}_i \cdot \underline{x}(t))$$

Fim Para

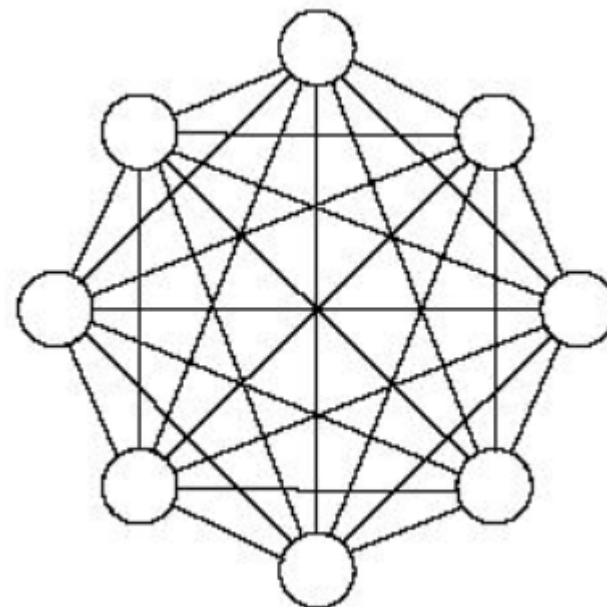
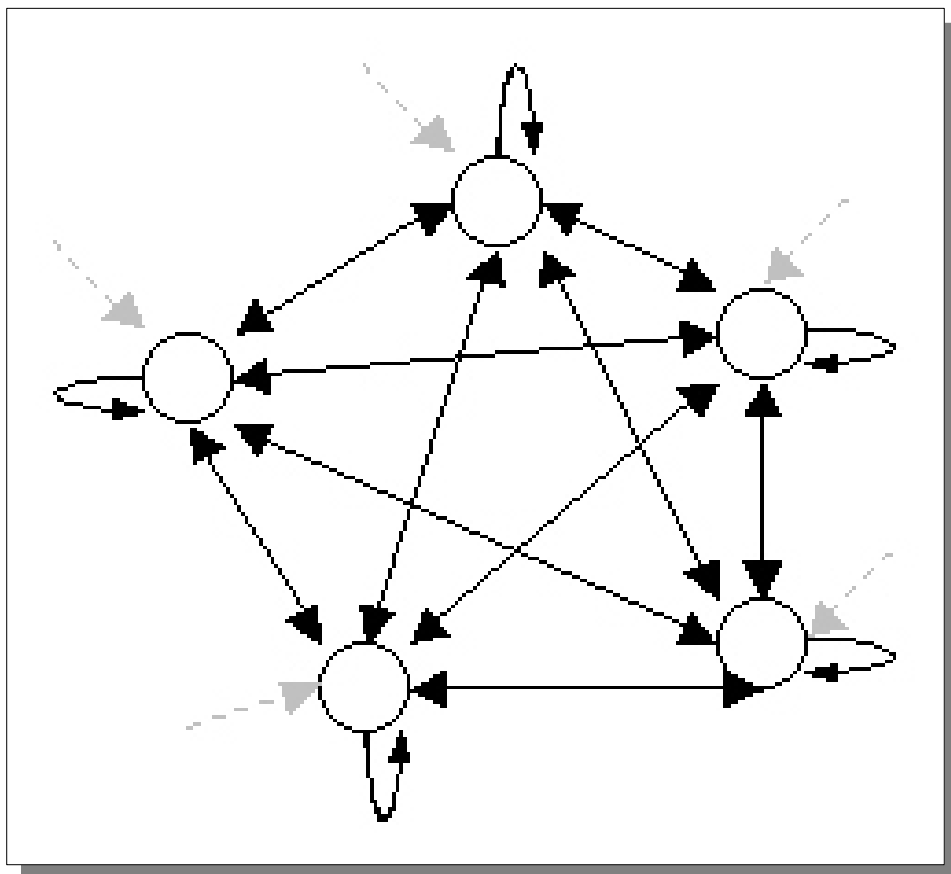
Fim Enquanto

Vamos ver um exemplo...



Aprendizado

- Consiste em determinar os pesos W_{ij} da rede.
- Sendo H a quantidade de neurônios e N a quantidade de padrões a armazenar: A capacidade de armazenamento é $N \leq 0,138H$.
- Modelo de conexão total $H=5$ e $H=8$:



Aprendizagem de Hebb

- A regra de adaptação dos pesos de Hebb é:

$$W_{ij} = \eta X_i X_j$$

- Tendo de reforçar os pesos em caso de atividade simultânea de dois neurônios.

Aprendizagem de Hebb

- “Algoritmo” de Treinamento:

$$W_{ij} := X_i X_j$$

$$\Rightarrow X_i = \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=1}^H w_{ij} \cdot X_j \right) = \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=1}^H (X_i \cdot X_j) \cdot X_j \right) = \operatorname{sgn} (X_i) = X_i$$

$$\Rightarrow X_i \text{ estável, } i=1, \dots, H$$

com $X_j X_i = 1$ para $X_j \in \{-1, 1\}$, $X_i \in \{-1, 1\}$

- Normalização do Cálculo do Peso:

$$W_{ij} = \frac{1}{H} X_i X_j$$

Relaxação, Minimização de Energia

- Na rede de Hopfield,
 - os pesos entre os neurônios são simétricos; e
 - define-se um peso nulo da realimentação do próprio neurônio, ou seja, $w_{ij} = 0$.
- Com essas condições, garantimos que a rede sempre terá uma relaxação para um estado estável através da **Função de Energia**:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^H \sum_{j=0}^H w_{ij} x_i x_j$$

- Isso acontece porque com os pesos simétricos, a energia obrigatoriamente tem que diminuir a cada passo de relaxamento.

Hora de trabalhar mais com o Modelo de Hopfield...