Universidade Federal do Espírito Santo – CCA UFES

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Agrárias – CCA UFES
Departamento de Computação

Combinatória

Tópicos Especiais em Programação

Site: http://jeiks.net
E-mail: jacsonrcsilva@gmail.com

Aprendendo a contar

- A **combinatória** é o ramo da matemática que trata a contagem.
  - Os problemas combinatórios são comuns e requerem perspicácia e atenção.
  - Uma vez que o problema for olhado de maneira correta, a resposta pode tornar óbvia.
- As técnicas de contagem básicas são:

  - Princípio da Multiplicação:

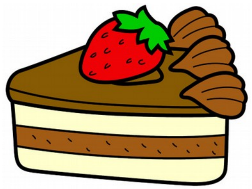
    se existem |A| possibilidades do conjunto A e |B| possibilidades do conjunto B, então existem |A| x |B| formas de combinar um elemento de A com um elemento de B.
  - Princípio da Adição:

    Se existem |A| possibilidades em um conjunto A e |B| possibilidades em um conjunto B, então existem |A| + |B| formas de tanto A ou B ocorrerem – assumindo que os elementos de A e B são distintos.

Princípio da Multiplicação

- Quantas linhas existe em uma tabela verdade com 5 proposições simples?

- Se uma criança pode escolher entre duas balas (uma rosa e uma preta) e entre três chicletes (um amarelo, um verde e outro branco), quantos conjuntos diferentes a criança pode ter?



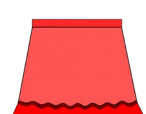
Princípio da Adição

- Se tiver que escolher uma sobremesa entre três tortas e quatro bolos, de quantas maneiras isso pode ser feito?

- Um consumidor deseja comprar um veículo em uma concessionária. A concessionária tem 23 automóveis e 14 caminhões no estoque. Quantas escolhas possíveis o consumidor tem?

"* e +"

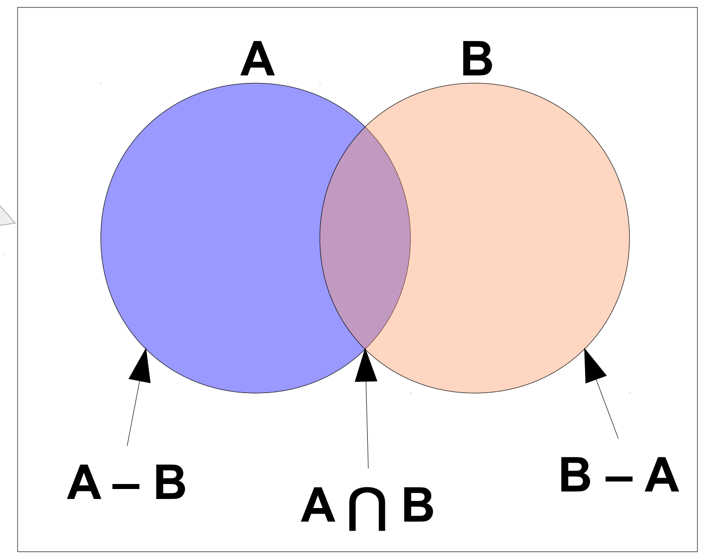
- Se uma mulher tem sete blusas, cinco saias e nove vestidos, de quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?



Princípio da Inclusão e Exclusão

- Ao somar dois conjuntos, tem que se tomar o cuidado de não somar o mesmo elemento duas vezes, pois o mesmo pode estar nos dois conjuntos
- O Princípio da Adição é um caso especial do Princípio da Inclusão e Exclusão.
- Tem-se que tomar cuidado, pois

  $A - B$, $B - A$, $A \cap B$ são distintos



- Princípio da inclusão e exclusão

  para dois conjuntos:

  $\mathbf{|A \cup B|} = |A| + |B| - |A \cap B|$

  $|A \cap B| = |A| + |B| - \mathbf{|A \cup B|}$
- E para três:

  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Princípio da Inclusão e Exclusão

- Um pesquisador de união pública entrevistou 35 eleitores, todos apoiando o referendo 1, o referendo 2, ou ambos. Ele descobriu que

  14 eleitores apoiam o referendo 1 e

  26 apoiam o referendo 2.

  Quantos eleitores apoiam ambos?

- Um grupo de estudantes está planejando encomendar pizzas.

  Se 13 comem calabresa,

  10 comem salame,

  12 comem queijo extra,

  4 comem tanto calabresa quanto salame,

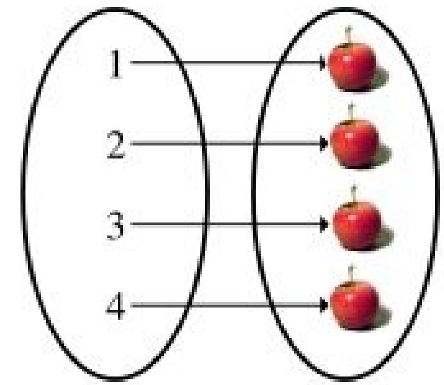
  5 comem tanto salame quanto queijo extra,

  7 comem tanto calabresa quanto queijo extra,

  3 comem de tudo.

  Quantos estudantes há no grupo?.

Objetos Combinatoriais



- Uma *bijeção* é uma mapeamento um para um entre os elementos de um conjunto e os elementos do outro conjunto.
- Contando o tamanho de um dos conjuntos automaticamente lhe dará o tamanho do outro conjunto.
- A exploração de bijeções depende de um repertório de conjuntos que saibamos como contar. Assim, poderemos mapear outros objetos para eles.
- Isso é útil para saber (sentir) o quão rápido o número de objetos cresce.
- As técnicas comuns para mensurar isso serão discutidas nos próximos slides.

Permutação

- Uma *permutação* é um arranjo de *n* itens, onde cada item aparece exatamente uma vez.
- Há *n!* permutações diferentes permutações para n.
- As 3! = 6 permutações de três itens são 123, 132, 213, 231, 312 e 321.
- Para n = 10, n! = 3.628.800.

Subconjuntos

- Um *subconjunto* é uma coleção de elementos de *n* possíveis itens.
- Existem 2^n subconjuntos distintos de *n* coisas.
- Assim, existem $2^3 = 8$ subconjuntos de {1,2,3}. Ex.: 1, 2, 3,12, 13, 23, 123, e o conjunto vazio (nunca se esqueça do conjunto vazio).
- Para $n = 20$, $2^n = 1.048.576$

Strings

- Uma *string* é uma sequência de itens que são organizados com repetição.
- Existem m^n sequências distintas de n itens provenientes de m caracteres.
  - Exemplo: existem 27 strings de tamanho 3 em 123.
- O número de strings binárias de tamanho n é idêntico ao número de subconjuntos de n itens (por quê?)

  4bits: 0000_2

  possuem 2^4 diferentes combinações...

Relações de Recorrência

- Relações de recorrência torna mais fácil a contagem de uma variedade de estruturas definidas recursivamente, como:
  - Árvores;
  - Listas;
  - Fórmulas bem definidas; e
  - Algoritmos dividir para conquistar.
- Uma relação de recorrência é uma equação que está definida em seus próprios termos, como os números de Fibonacci:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Relações de Recorrência, por quê?

- Elas são úteis porque muitas funções naturais são expressas como recorrências:
  - Polinomiais:

$$a_n = a_{n-1} + 1,\ a_1 = 1 \ \rightarrow\ a_n = n$$

  - Exponenciais:

$$a_n = 2a_{n-1},\ a_1 = 2 \ \rightarrow\ a_n = 2^n$$

- Funções estranhas, mas interessantes e difíceis de representar:

$$a_n = na_{n-1},\ a_1 = 1 \ \rightarrow\ a_n = n!$$

- Às vezes, é relativamente fácil encontrar uma recorrência como resposta de um problema de contagem.

Coeficientes Binomiais

- A classe mais importante de números contáveis são os coeficientes binomiais.
- O número de maneiras de escolher *k* coisas de *n* possibilidades é denotado por: $\binom{n}{k}$
- O que eles contam?
  - Comissões: Quantas maneiras existem para formar uma comissão de k membros retirados dentre n pessoas?

    A resposta é: $\binom{n}{k}$
  - Caminhos de uma rede (matriz): Quantas maneiras existem para viajar do canto superior esquerdo de uma matriz *n* x *m* para o canto inferior direito caminhando somente para baixo e para a direita?

    Cada caminho deve consistir de n+m passos, n para baixo e m para a direita. Todo o caminho com um conjunto diferente de movimentos é distinto, então temos o conjunto de caminhos: $\binom{n+m}{n}$

Coeficientes Binomiais

- Leia: “de *n* escolha *k*”

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Coeficientes de $(a + b)^n$

- Observe:

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

- Qual é o coeficiente do termo $a^k b^{n-k}$?

A resposta é: $\binom{n}{k}$

Porque ele conta a quantidade de maneiras que podemos escolher os *k* termos "a" em *n* possibilidades.

- A expressão $(x+y)^5$ fica:

$$\binom{5}{0}x^5y^0+\binom{5}{1}x^4y^1+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}x^1y^4+\binom{5}{5}x^0y^5$$

Implementação

- A seguinte implementação dessa recorrência é um bom exemplo das técnicas de programação utilizadas na programação dinâmica.
- Ela armazena uma matriz de resultados que nós podemos utilizar para definir os valores apropriados da recorrência.

```
#define MAXN 100
long coeficientes_binomiais(int n, int k)/* de n escolha k */
{
   int i,j;
   long bc[MAXN][MAXN];
   for (i=0; i<=n; i++) bc[i][0] = 1;
   for (j=0; j<=n; j++) bc[j][j] = 1;

   for (i=1; i<=n; i++)
      for (j=1; j<i; j++)
         bc[i][j] = bc[i-1][j-1] + bc[i-1][j];

   return( bc[n][k] );
}
```

Fibonacci

- Várias outras sequências repetidamente aparecem em aplicações.
- Elas podem ser facilmente computadas utilizando relações de recorrência.
  - Números de Fibonacci:

    Definidos pela recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ e os valores iniciais $F_0 = 0$ and $F_1 = 1$. Esses números são muitos utilizados devido à sua característica e sua simplicidade. Os primeiros valores são 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …
  - Fórmula para calcular os números de Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{(5)}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2} \right)^n \right)$$

Números de Catalan

- Os números de Catalan formam uma sequência de números naturais que ocorrem em vários problemas de contagem
- Frequentemente, envolvem objetos definidos recursivamente.
- O número de Catalan é obtido pela seguinte fórmula:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \qquad com\ n \geq 0$$

- Ou:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \qquad com\ n \geq 0$$

- Mas também satisfazem a seguinte relação de recorrência:

$$C_0 = 1 \quad e \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

Números de Catalan

- A expressão na forma de recursividade é:

$$C_n = \begin{cases} \text{se} \quad n=0 \ \Rightarrow \ 1 \\ \text{se} \quad n>0 \ \Rightarrow \ \sum_{i=0}^{n-1} C_i . C_{n-1-i} \end{cases}$$

n	C_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1.430
9	4.862
10	16.796
11	58.786
12	208.012
13	742.900
14	2.674.440
15	9.694.845
16	35.357.670
	...

Utilização dos Números de Catalan

- Empilhando moedas:

  Vamos empilhar moedas sobre uma linha de baixo que consiste de *n* moedas consecutivas.

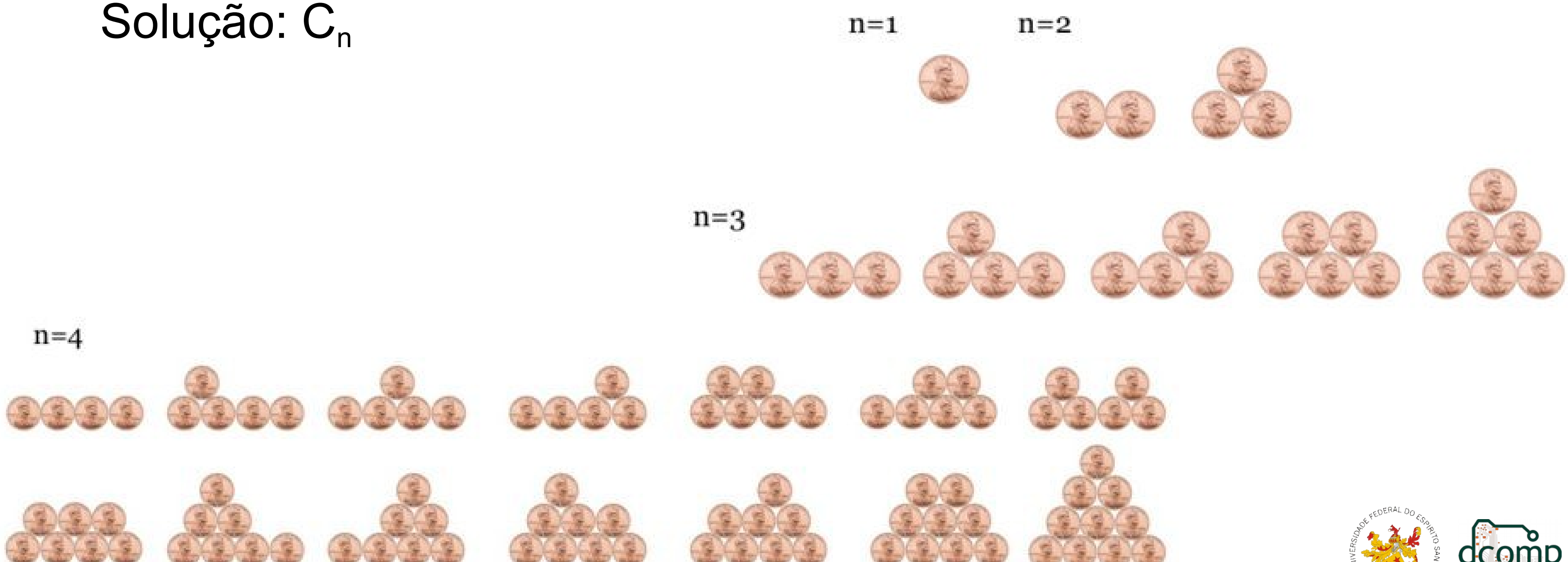
  Não é permitido colocar moedas dos dois lados das moedas que estão no(s) extremo(s) da linha inferior.

  Quantas maneiras existem para empilhar moedas sobre *n* moedas?

- Então:

  n: O número de maneiras para empilhar moedas no plano.

  Solução: C_n



Utilização dos Números de Catalan

- Balanceamento de Parênteses

  Queremos agrupar uma série de parênteses.

  Cada parênteses aberto deve ter uma correspondência de parênteses fechado.

  Portanto, "(() ())" é válida, mas ") ()) ((" e "()) () (" não é.

  Quantos grupos existem para grupo de n pares de parênteses?

- Então:

  n: O número de pares de parênteses.

  Solução: C_n

n = 0	Não fazer nada!	1 solução
n = 1	()	1 solução
n = 2	(( )) | () ()	2 soluções
n = 3	((( ))) | (() ()) | (()) () | () (()) | () () ()	5 soluções

Utilização dos Números de Catalan

- Muitas soluções são equivalentes aos balanceamento de parênteses.
- Se quisermos conectar cinco pontos com dois arcos em uma linha deitada:

Utilização dos Números de Catalan

- Triangulação de polígonos:

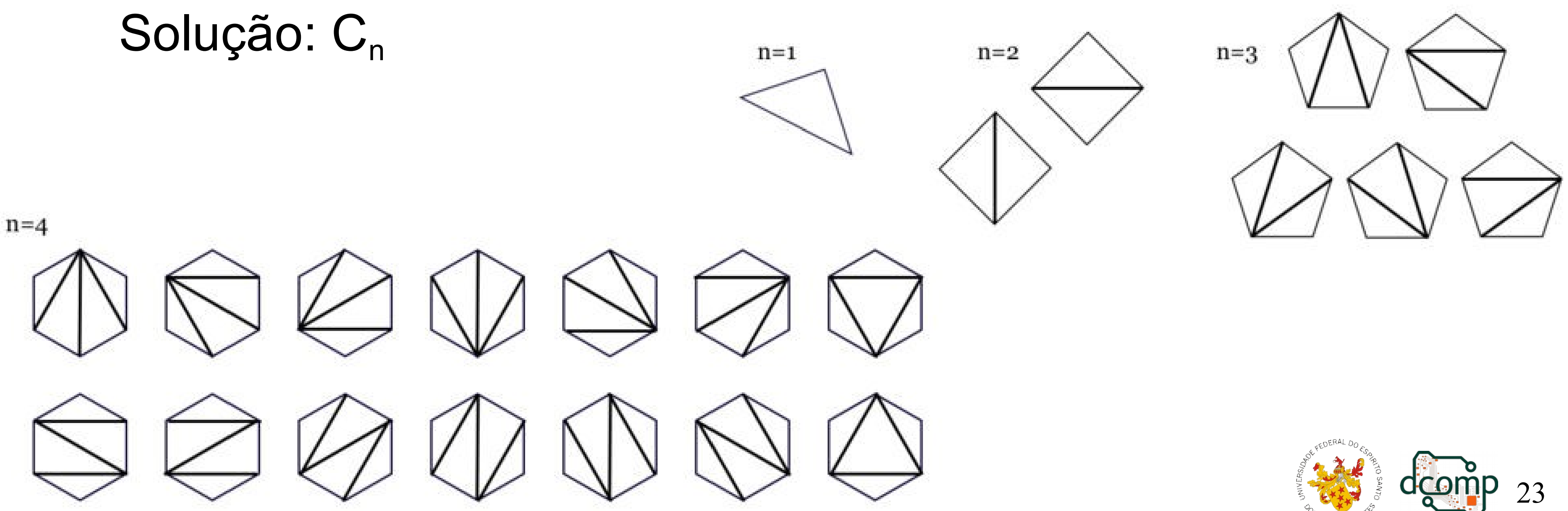
  Queremos cortar um polígono convexo em triângulos, ligando os vértices com linhas retas que não se cruzam.

  De quantas maneiras diferentes existem para um polígono com N + 2 lados?

- Então:

  n: o número de lados do polígono – 2

  Solução: C_n



Utilização dos Números de Catalan

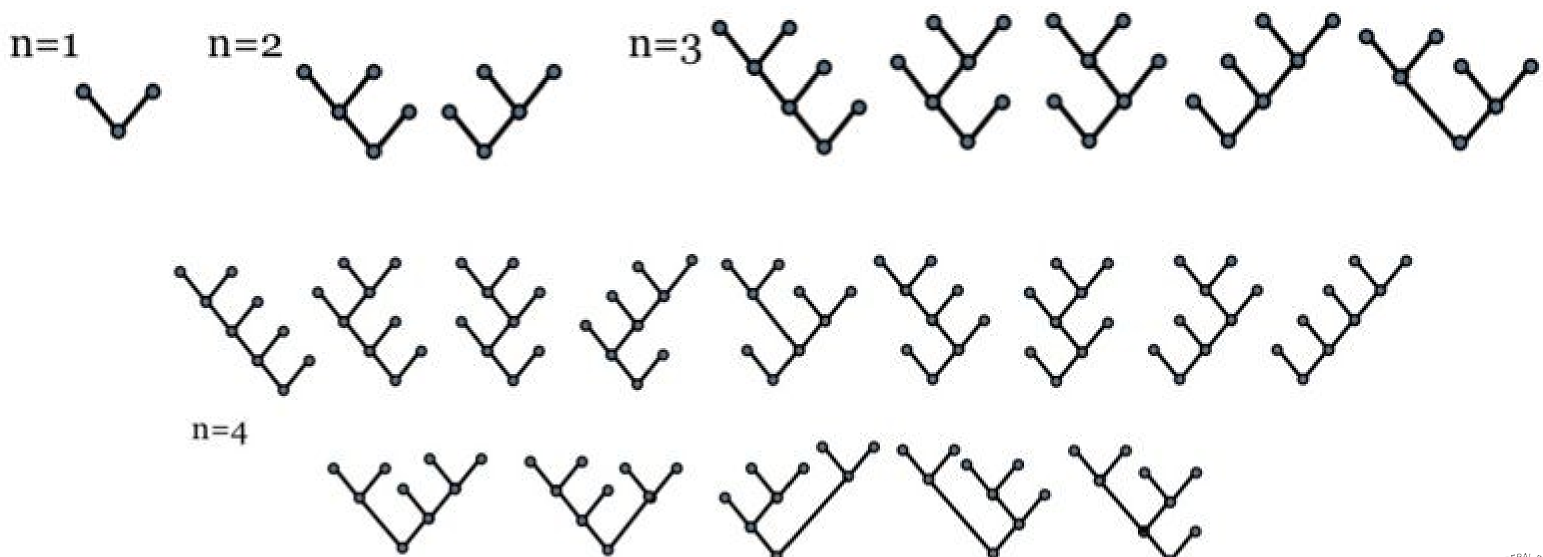
- Árvores Binárias

  Quantos árvores binárias completas existem com *n* nós internos?

- Então:

  n: o número de nós internos sobre árvores binárias completas.

  Solução: C_n



Números de Catalan

- Mais exemplos em:

<http://goo.gl/4nI3y9>

<http://goo.gl/Ss7A9>

Números Eulerianos

- Os números de Euler permitem contar o número de *permutações* de *n* elementos com *k ascendentes*.
  - Uma *permutação* é um rearranjo de uma lista ordenada de itens.
  - Um *ascendente* de uma permutação $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é um par (a_i, a_{i+1}), tal que $a_i < a_{i+1}$.
- Exemplo:
  - As permutações de {1,2,3} são:
    {1,2,3}, {1,3,2}, {2,1,3}, {2,3,1}, {3,1,2}, {3,2,1}
  - As permutações com exatamente 1 ascendente são:

{**1**,**3**,2}, {2,**1**,**3**}, {**2**,**3**,1}, {3,**1**,**2**} ➔ $\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle = 4$

- Sendo,

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k+1)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$$

Partições Inteiras

- Uma partição inteira de *n* é um conjunto não ordenado de inteiros positivos que somam até *n*.

  Por exemplo, existem sete partições de 5, ou seja, (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1 , 1), e (1, 1, 1, 1, 1).

  A maneira mais fácil de contá-las é a de definir uma função f(*n*, *k*), dando o número de partições inteiras de *n* com o maior valor sendo *k*.

  Como a maior parte faz ou não chegar ao limite, então f(n, k) = f(n - k, k) + f (n, k – 1).

  As bases são f(1, 1) = 1 e f (n, k) = 0 quando k> n.

Recursividade

- Utilizando a recursividade:
  - Devemos possuir um critério de parada;
  - Os valores são armazenados na memória como uma pilha;
  - A cada nova iteração, as variáveis de escopo são "recriadas" no novo espaço da pilha de memória;
  - Pode sobrecarregar o sistema e demorar a fornecer a resposta;
  - Pode gerar erros/problemas, devido à:
    - Critérios de parada mau incrementados;
    - Ponteiros mau alocados/referenciados;
    - Métodos custosos de resolução.

Problemas

- Fáceis:
  - Counting;
  - The Priest Mathematician;
  - How many Fibs?
- Intermediários:
  - Steps;
  - Expressions;
- Difíceis:
  - How many pieces of land?