Universidade Federal do Espírito Santo – CCA UFES

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Agrárias – CCA UFES
Departamento de Computação

Quantificadores

Lógica Computacional 1

Site: http://jeiks.net
E-mail: jacsonrcsilva@gmail.com

Quantificador Universal

- Seja:
  - A um conjunto não vazio
  - $V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$
- Quando **todos** os elementos do conjunto A **satisfazem** a sentença aberta p(x). Podemos afirmar:

  (I) Para todo elemento x de A, p(x) é verdadeira.

  (II) Qualquer que seja o elemento x de A, p(x) é verdadeira.
- Outras formas de indicação:

(1) $(\forall x \in A)\ (p(x))$

(2) $\forall x \in A,\ p(x)$

(3) $\forall x \in A : p(x)$

(4) $(\forall x)\ (p(x))$

(5) $\forall x,\ p(x)$

(6) $\forall x : p(x)$

Quantificador Universal

- A sentença aberta p(x) não é uma proposição, mas ao ser agregada ao símbolo ∀, torna-se uma proposição.
  - Portanto, pode assumir:

    * O valor Verdade, se $V_p = A$ e

    * O valor Falsidade, se $V_p \neq A$.
- Exemplo 1:
  - No universo finito A = {3,5,7}

    $(\forall x \in A)$ (x é primo) $\Leftrightarrow$ (3 é primo $\wedge$ 5 é primo $\wedge$ 7 é primo)
  - A proposição "∀x, (x é primo)" é Verdadeira.
- Exemplo 2:

  (∀x) (2x > x): "Qualquer que seja x, 2x > x".

Quantificador Existencial

- Seja:
  - A um conjunto não vazio
  - $Vp = \{x \mid x \in A \ \wedge \ p(x)\}$
- Quando **um** elemento, *pelo menos*, do conjunto A **satisfaz** a sentença aberta p(x). Podemos afirmar:

  (I) Existe pelo menos um $x \in A$ tal que p(x) é verdadeira.

  (II) Para algum $x \in A$, p(x) é verdadeira.
- Outras formas de indicação:

(1) $(\exists x \in A)\ (p(x))$

(2) $\exists x \in A,\ p(x)$

(3) $\exists x \in A : p(x)$

(4) $(\exists x)\ (p(x))$

(5) $\exists x,\ p(x)$

(6) $\exists x : p(x)$

Quantificador Existencial

- A sentença aberta p(x) não é uma proposição, mas ao ser agregada ao símbolo ∃, torna-se uma proposição.
  - Portanto, pode assumir:

    * O valor Verdade, se $V_p \neq \emptyset$ e

    * O valor Falsidade, se $V_p = \emptyset$.
- Exemplo 1:
  - No universo A = {3,4,5}

    $(\exists x \in A)$ (x é par) ⇔ (3 é par ∨ 4 é par ∨ 5 é par)
  - A proposição "∃x, (x é par)" é Verdadeira.
- Exemplo 2:

  (∃x) (x vive na lua)
  É uma proposição falsa para o universo H (dos seres humanos).

Quantificador Existencial e Unicidade

(i) $(\exists x \in R)\ (x^3 = 27)$

(ii) $x^3 = 27 \wedge y^3 = 27 \Rightarrow x = y$

- A proposição (i) diz que existe pelo menos um $x \in R$ tal que $x^3 = 27$ ($x=3$):
  - Afirmação de **Existência**.
- A proposição (ii) diz que não pode existir mais de um $x \in R$ tal que $x^3 = 27$:
  - Afirmação de **Unicidade**.
- Então, em: $(\exists !\ x \in R)\ (x^3 = 27)$

$\exists!$ é chamado de *quantificador existencial de unicidade*. Lê-se:

Existe um e um só $x \in R$ tal que $x^3 = 27$

Variável Aparente e Variável Livre

- Variável aparente:
  - quando possui um quantificador.
- Variável livre:
  - quando não possui um quantificador.
- Exemplo:
  - A letra **x** é **variável livre** nas *sentenças abertas*:

    $3x – 1 = 14$ (equação), $x + 1 > x$ (inequação)
  - Mas é **variável aparente** nas *proposições*:

    $(\exists x)(3x – 1 = 14)$, $(\forall x)(x + 1 > x)$

Negação de proposições com quantificador

- No universo H dos seres humanos, as expressões abaixo:

  (i) $(\forall x)$ (x fala francês)

  (ii) $(\exists x)$ (x foi à Lua)

- Possui como negação:

  (i) $\sim(\forall x)$ (x fala francês) $\Leftrightarrow$ $(\exists x)(\sim$x fala francês)

  (ii) $\sim(\exists x)$ (x foi à Lua) $\Leftrightarrow$ $(\forall x)(\sim$x foi à Lua)

- Assim:

  (i) Negação de "Toda a pessoa fala francês":

  "Nem toda pessoa fala francês" ou

  "Ao menos uma pessoa não fala francês".

  (ii) negação de "Alguém foi à Lua":

  "Ninguém foi à Lua" ou

  "Todos não foram à Lua".

Contraexemplo

- Para mostrar que uma proposição na forma:

  $(\forall x \in A)(\ p(x)\ )$ é **F**alsa.

- Basta mostrar que sua **negação**:

  $(\exists x \in A)\ (\sim p(x))$ é **V**erdadeira.

- Assim, estamos mostrando que há pelo menos um elemento do conjunto A que é falso, ou seja, nem todos os elementos de A satisfazem p(x).

- Exemplo:

  Para a proposição: $(\forall n \in N)\ (2^n > n^2)$

  Contraexemplo: para n=2, temos $2^2 = 2^2$.