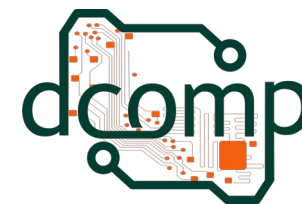




Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro de Ciências Agrárias – CCA UFES  
Departamento de Computação



# Operações Lógicas Sobre Sentenças Abertas

## **Lógica Computacional 1**

Site: <http://jeiks.net>

E-mail: [jacsonrcsilva@gmail.com](mailto:jacsonrcsilva@gmail.com)

# Operações Lógicas sobre Sentenças Abertas

As operações lógicas já utilizadas em outras proposições também são aplicadas naturalmente às sentenças abertas

# Conjunção

$$V_{p \wedge q} = V_p \cap V_q = \{x \in A \mid p(x)\} \cap \{x \in A \mid q(x)\}$$

- Exemplos:

(1)  $x$  é médico  $\wedge$   $x$  é professor

(2)  $x > 2 \wedge x < 8$

(3)  $a < x < b \Leftrightarrow x > a \wedge x < b$

(4)  $3 \mid x \wedge 5 \mid x \Leftrightarrow 15 \mid x$

(5)  $1x + y = 8 \wedge 5x - 3y = 9 \Leftrightarrow x = 3 \wedge y = 2$

que também pode-se escrever:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

# Disjunção

$$V_{p \vee q} = V_p \cup V_q = \{x \in A \mid p(x)\} \cup \{x \in A \mid q(x)\}$$

- Exemplos:

(1)  $x$  é médico  $\vee$   $x$  é professor

(2)  $x \mid 6 \vee x \mid 10 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$

(3)  $x < 2 \vee x > 8$

(4)  $x = 5 \vee x < 5 \Leftrightarrow x \leq 5$

# Negação

$$\forall \sim p = C_A \forall p = C_A \{x \in A \mid p(x)\}$$

Onde:  $C_A$  = Complemento de A

- Exemplos:

(1)  $\sim x$  tem menos de 21 anos  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x$  tem 21 anos  $\vee x$  tem mais de 21 anos

(2)  $\sim x$  é par  $\Leftrightarrow x$  é ímpar

(3)  $\sim(x < y) \Leftrightarrow x \geq y$

(4)  $\sim(x = y) \Leftrightarrow x \neq y \Leftrightarrow x < y \vee x > y$

# Condicional

$$V_{p \rightarrow q} = V_{\sim p} \cup V_q = C_A V_p \cup V_q$$

- Exemplos:

(1)  $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0$

(2) Sentenças abertas em  $\mathbb{N}$ :

$$p(x): x \mid 12 \quad q(x): x \mid 45$$

$$\begin{aligned} V_{p \rightarrow q} &= C_{\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} \mid p(x)\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid q(x)\} = \\ &= C_{\mathbb{N}} \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \\ &= \mathbb{N} - \{2, 4, 6, 12\} \end{aligned}$$

# Bicondicional

$$V_{p \leftrightarrow q} = V_{p \rightarrow q} \cap V_{q \rightarrow p}$$

- Exemplos:

(1)  $x > -5 \leftrightarrow x < 0$

$$V_p = \{-4, -3, -2, -1\}$$

(2) Sentenças abertas em  $\mathbb{N}$ :

$$p(x): x \mid 6 \quad q(x): x \mid 15$$

$$C_{\mathbb{N}} V_p \cup V_q = C_{\mathbb{N}} \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 3, 5, 15\} = \mathbb{N} - \{2, 6\}$$

$$C_{\mathbb{N}} V_q \cup V_p = C_{\mathbb{N}} \{1, 3, 5, 15\} \cup \{1, 2, 3, 6\} = \mathbb{N} - \{5, 15\}$$

portanto:

$$V_{p \leftrightarrow q} = [ \mathbb{N} - \{2, 6\} ] \cap [ \mathbb{N} - \{5, 15\} ] = \mathbb{N} - \{2, 5, 6, 15\}$$

# Álgebra das sentenças abertas

- As propriedades das operações lógicas sobre as proposições se transmitem automaticamente às operações lógicas sobre sentenças abertas.
- Porém, as propriedades de identidade:

$$p \wedge t \Leftrightarrow p, \quad p \wedge c \Leftrightarrow c, \quad p \vee t \Leftrightarrow t, \quad p \vee c \Leftrightarrow p$$

agora assumem o novo aspecto:

(I) A **conjunção** de uma *sentença aberta* com outra que exprime uma *condição universal* é **equivalente** à *primeira*:

“sentença aberta”  $\wedge$  “condição universal”  $\Leftrightarrow$  “sentença aberta”

(II) A **conjunção** de uma *sentença aberta* com uma outra que exprime uma *condição impossível* **também** exprime uma *condição impossível*:

“sentença aberta”  $\wedge$  “condição impossível”  $\Leftrightarrow$  “sentença impossível”



# Álgebra das sentenças abertas

- Mais duas propriedades por dualidade lógica:

(III) A **disjunção** de uma *sentença aberta* com outra que exprime uma *condição impossível* é **equivalente** à *primeira*:

“sentença aberta”  $\vee$  “condição impossível”  $\Leftrightarrow$  “sentença aberta”

(IV) A **disjunção** de uma *sentença aberta* com uma outra que exprime uma *condição universal* **também** exprime uma *condição universal*:

“sentença aberta”  $\vee$  “condição universal”  $\Leftrightarrow$  “sentença universal”