Universidade Federal do Espírito Santo – CCA UFES

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Agrárias – CCA UFES
Departamento de Computação

Método Dedutivo

Lógica Computacional 1

Site: http://jeiks.net
E-mail: jacsonrcsilva@gmail.com

Método Dedutivo

- Todas as implicações e equivalências foram demonstradas até hoje pelo **Método das Tabelas Verdade**.
- Outra forma mais eficiente é denominada "**Método Dedutivo**"
- Para apresentá-lo, serão expostos exemplos e será utilizada a Álgebra das Proposições.
- Nos exemplos serão utilizadas
  - As proposições simples:
    - **p**, **q**, **r**, **t** (verdadeira) e **c** (falsa).
  - E as proposições compostas:
    - **P**, **Q**, **R**, **T** (tautologia) e **C** (contradição).

Exemplificação do Método Dedutivo

- Demonstre as implicações:

  (i) $c \Rightarrow p$ (ii) $p \Rightarrow t$

  p é uma proposição qualquer,

  c é uma proposição com valor de **Falsidade** e

  t é uma proposição com valor de **Verdade**.

- Então sua demonstração é:

  (i) $c \rightarrow p \Leftrightarrow \sim c \vee p \Leftrightarrow t \vee p \Leftrightarrow t$

  (ii) $p \rightarrow t \Leftrightarrow \sim p \vee t \Leftrightarrow t$

Exemplificação do Método Dedutivo

- Demonstre a implicação: $p \wedge q \Rightarrow p$ (Simplificação)
  - Demonstração:

1. $p \wedge q \rightarrow p$
2. $\sim(p \wedge q) \vee p$
3. $\sim p \vee \sim q \vee p$
4. $(\sim p \vee p) \vee \sim q$
5. $T \vee \sim q$
6. T

Exemplificação do Método Dedutivo

- Demonstre a implicação: $p \Rightarrow p \lor q$ (Adição)
  - Demonstração:

    1. $p \rightarrow p \lor q$
    2. ?
    3. ?
    4. ?
    5. ?

Exemplificação do Método Dedutivo

- Demonstre a implicação: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
  - Demonstração

    1. $(p \rightarrow q) \wedge p$
    2. $(\sim p \vee q) \wedge p$
    3. $(\sim p \wedge p) \vee (q \vee p)$
    4. $C \vee (q \wedge p)$
    5. $q \wedge p$
    6. q

Exemplificação do Método Dedutivo

- Demonstre as seguintes implicações:
  - a) $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ (Modus tollens)
  - b) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ (Silogismo Disjuntivo)
  - c) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
  - d) $p \Rightarrow q \rightarrow q$
  - e) $p \Rightarrow \sim p \rightarrow q$
  - f) $p \rightarrow q \Rightarrow p \wedge r \rightarrow q$
  - g) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow c$ (Redução a absurdo)

Exemplificação do Método Dedutivo

- Demonstre as seguintes implicações:

h) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

i) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p$

j) $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (Exportação-Importação)

k) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow r$

l) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$

m) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \vee s$

Redução do Número de Conectivos

- $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de ~ e $\vee$:
  - * $p \wedge q \Leftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim\sim q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$
  - * $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
  - * $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

    $\Leftrightarrow \sim(\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p))$
- $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de ~ e $\wedge$:
  - * $p \vee q \Leftrightarrow \sim\sim p \vee \sim\sim q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$
  - * $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
  - * $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

    $\Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)$

Redução de Número de Conectivos

- $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de ~ e $\rightarrow$:
  - $p \wedge q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \rightarrow \sim q)$
  - $p \vee q \Leftrightarrow \sim\sim p \vee q \Leftrightarrow \sim p \rightarrow q$
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

    $\Leftrightarrow \sim(\ (p \rightarrow q) \rightarrow \sim(q \rightarrow p)\ )$

Forma Normal das Proposições

- Uma proposição está na Forma Normal (FN) se e somente se, quando muito, contém os conectivos ~, ∧ e ∨.
- Exemplos:

  ~p ∧ ~q , ~(~p ∨ ~q) , (p ∧ q) ∨ r

- Toda proposição pode ser levada para uma FN. Pra tal, basta eliminar os conectivos → e ↔. Exemplos:

  * p → q por ~p ∨ q

  * p ↔ q por (~p ∨ q) ∧ (p ∨ ~q)

Forma Normal das Proposições

- Existem duas espécies de FN para uma proposição:
  - Forma Normal Conjuntiva (FNC);
  - Forma Normal Disjuntiva (FND).

Forma Normal Conjuntiva

- Uma proposição está na Forma Normal Conjuntiva (FNC) se e somente se atendem as seguintes condições:

  1. Contém somente os conectivos ~, ∧, e ∨;
  2. ~ não aparece repetido, sobre si mesmo, como ~~. Além disso, não tem alcance sobre ∧ e ∨, só incidindo sobre letras proposicionais;
  3. ∨ não tem alcance sobre ∧, ou seja, não pode ocorrer algo do tipo: p ∨ (q ∧ r).

- Exemplos de FNC:

  ~p ∨ ~q , ~p ∧ q ∧ r , (~p ∨ q) ∧ (~q ∨ ~r)

Exemplo

- Determinar a FNC da proposição:

  $\sim(((p \lor q) \land \sim q) \lor (q \land r))$

  Resolução:

  1. $\sim((p \lor q) \land \sim q) \land \sim(q \land r)$
  2. $(\sim(p \lor q) \lor \sim\sim q) \land (\sim q \lor \sim r)$
  3. $((\sim p \land \sim q) \lor q) \land (\sim q \lor \sim r)$
  4. $(\sim p \lor q) \land (\sim q \lor q) \land (\sim q \lor \sim r)$

  – Se quiser continuar, como $(\sim q \lor q)$ é Tautologia, ela pode ser retirada da fórmula, formando a equivalente:

  5. $(\sim p \lor q) \land (\sim q \lor \sim r)$

Exercício

- Determine a FNC da proposição:

  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

  Resolução:

  1. $(\sim p \lor q) \leftrightarrow (\sim\sim q \lor \sim p)$
  2. $(\sim p \lor q) \leftrightarrow (q \lor \sim p)$
  3. …
  4. …

```
* p → q por ~p ∨ q
* p ↔ q por (~p ∨ q) ∧ (p ∨ ~q)
```

Exercício

- Determine a FNC da proposição:

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

Resolução:

1. $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim\sim q \vee \sim p)$
2. $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \sim p)$
3. $(\sim(\sim p \vee q) \vee (q \vee \sim p)) \wedge ((\sim p \vee q) \vee \sim(q \vee \sim p))$
4. …

* $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$
* $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

Exercício

- Determine a FNC da proposição:

  $p \leftrightarrow q \vee \sim r$

  Resolução:

  1. …

```
* p → q por ~p ∨ q
* p ↔ q por (~p ∨ q) ∧ (p ∨ ~q)
```

Forma Normal Disjuntiva

- Uma proposição está na Forma Normal Disjuntiva (FND) se e somente se atendem as seguintes condições:
  1. Contém somente os conectivos ~, ∧, e ∨;
  2. ~ não aparece repetido, sobre si mesmo, como ~~. Além disso, não tem alcance sobre ∧ e ∨, só incidindo sobre letras proposicionais;
  3. ∧ não tem alcance sobre ∨, ou seja, não pode ocorrer algo do tipo: p ∧ (q ∨ r).
- Exemplos de FND:

  ~p ∨ q , p ∨ (~q ∧ r) , (~p ∧ q) ∨ (~q ∧ ~r)

Exemplo

- Determinar a FND da proposição:

  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

  Resolução:

  1. $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
  2. $((\sim p \vee q) \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \wedge p)$
  3. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)$

Exercício

- Determine a FND da proposição

  $\sim(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$

  Resolução:

  1. *comece resolvendo o De Morgan...*
  2.
  3.
  4.
  5.
  6.

Princípio da Dualidade

- Seja uma proposição somente com os conectivos: ~, $\wedge$ e $\vee$.

  Ex.: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

- A proposição que resulta trocando:
  - cada símbolo de $\wedge$ por $\vee$ (E por OU) e
  - cada símbolo de $\vee$ por $\wedge$ (OU por E).

  Ex.: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

- Chama-se **dual**.
- O **princípio** da **dualidade** é:
  - Se P e Q são proposições equivalentes que só contém os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$,
  - então as suas duais respectivas P_1 e Q_1 também são **equivalentes**.

Exercícios

- Obtenha a dual da expressão abaixo:

$$\sim p \lor q \lor r \Leftrightarrow (q \lor r) \lor \sim p$$

- Agora, faça a tabela verdade da expressão original e da sua dual e prove as equivalências existentes.