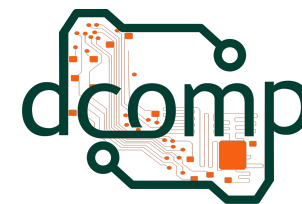




Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro de Ciências Agrárias – CCA UFES  
Departamento de Computação



# Lógica Nebulosa (Fuzzy)

## **Inteligência Artificial**

Site: <http://jeiks.net>

E-mail: [jacsonrcsilva@gmail.com](mailto:jacsonrcsilva@gmail.com)

# Tópicos

- Introdução;
- Relações de Pertinência;
- *Fuzzificação*;
- Variáveis Linguísticas;
- Operações com Conjuntos Nebulosos (*Fuzzy*);
- *Defuzzificação*;
- Referências.

# Introdução

- A utilização da lógica é importante para automatizar o raciocínio em sistemas computacionais.
- Porém, a lógica convencional é **bivalente**, possuindo somente dois valores: verdadeiro e falso.
- Com essa bivalência, torna-se difícil representar problemas complexos.
- Exemplos:
  - Uma pessoa com 1,70m é alta, baixa, ou média?
  - Um calçado de R\$ 100,00 é caro, ou barato?
  - Uma pessoa com 30 anos é nova, jovem ou velha?

# Introdução

- Assim, a Lógica Nebulosa (ou difusa, ou *fuzzy*), propõe outra forma da utilização da lógica,
  - No lugar de dois valores únicos, utiliza valores contínuos de **zero** à **um**;
  - **Zero** representa a **completa falsidade**;
  - **Um** representa a **verdade absoluta**.
- Foi introduzida por Zadeh em 1965;
- É uma lógica **polivalente**, por possuir diversos valores contínuos;
- É uma lógica que permite trabalhar com valores de **indecisão**, já comuns às pessoas.

# Relações de Pertinência

- A relação de pertinência refere-se à ligação existente entre um valor e um conjunto.
- Existe uma diferença entre as seguintes relações de pertinência:
  - Teoria Clássica dos Conjuntos
  - Teoria dos Conjuntos Nebulosos

# Teoria Clássica dos Conjuntos

- Existem apenas duas possibilidades para um elemento em relação a um dado conjunto:
  - O elemento **pertence** ao conjunto (verdadeiro);
  - O elemento **não pertence** ao conjunto (falso).
- Essa é a relação de pertinência do elemento: pertencer ou não pertencer ao conjunto.

$$\mu_A(x): U \rightarrow \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

- Assim,  $\mu_A(x)$  significa o grau de pertinência do valor  $x$  no conjunto  $A$ .

# Teoria dos Conjuntos Nebulosos

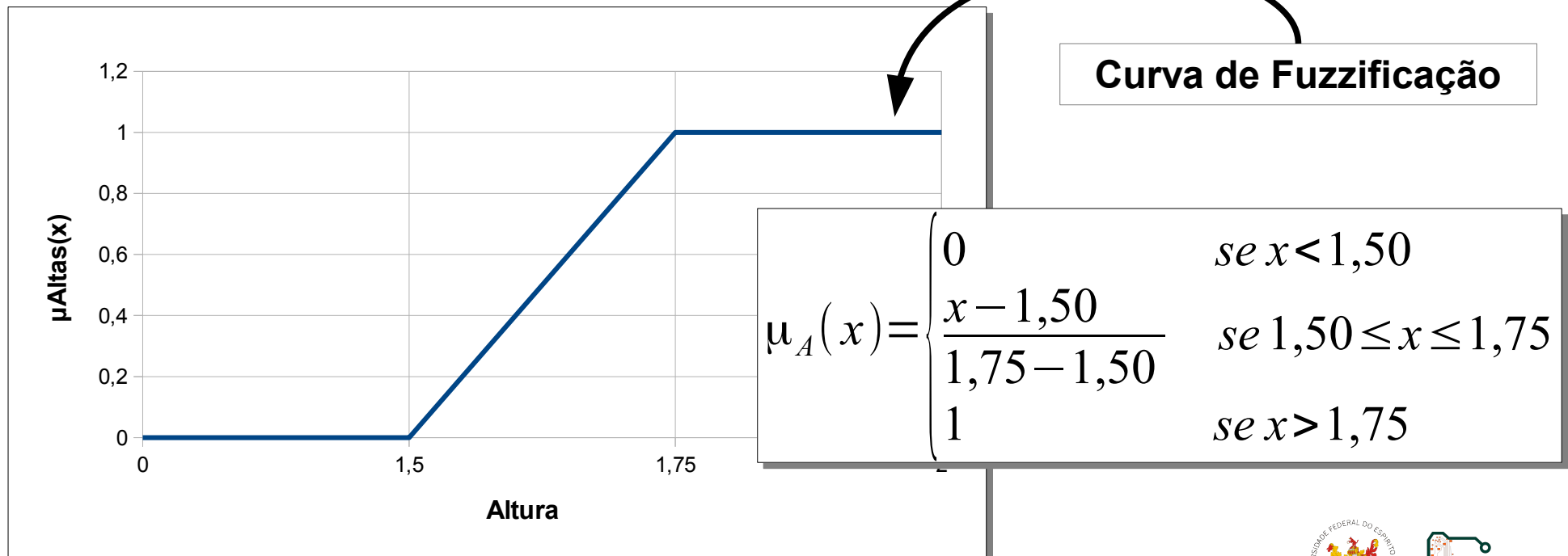
- Na Lógica Nebulosa:
  - Dado um conjunto universo  $U$ ,
  - Dado um subconjunto nebuloso  $A \subset U$ ,
  - $A$  é definido por uma **função de pertinência** que associa a cada elemento  $x \in U$ , um grau  $\mu_A(x)$  entre 0 e 1.

$$\mu_A(x): U \rightarrow [0,1]$$

- Assim,  $\mu_A(x) = 0,7$  significa que  $x$  pertence ao conjunto  $A$  com 70% de confiança.
- Obs.: o grau de confiança está relacionado com probabilidade, porém os conceitos Nebulosos não obedecem todas as leis da probabilidade.

# Fuzzificação

- Para utilizar os valores absolutos em um sistema nebuloso, é necessário convertê-los.
- Essa conversão é denominada **fuzzificação**:
  - Transformação de um valor real em uma medida de imprecisão.
- Exemplo para pessoas Altas:





# Variáveis Linguísticas

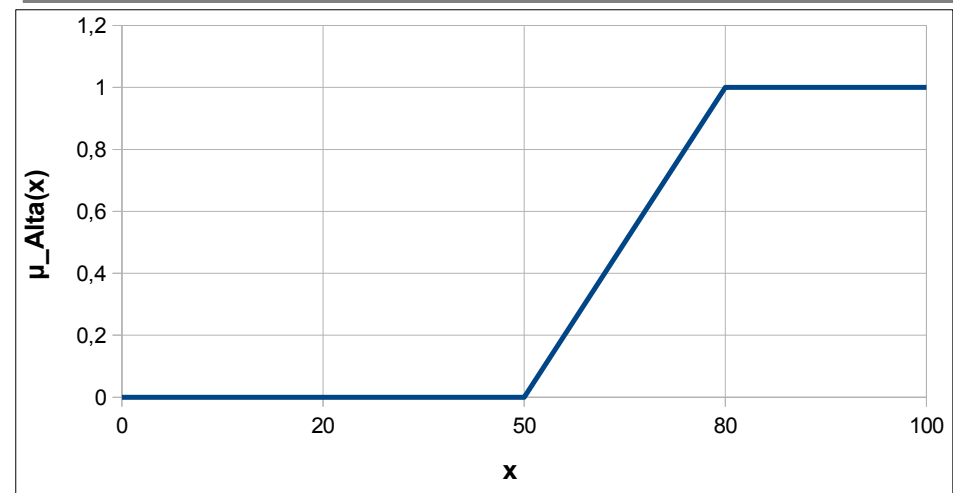
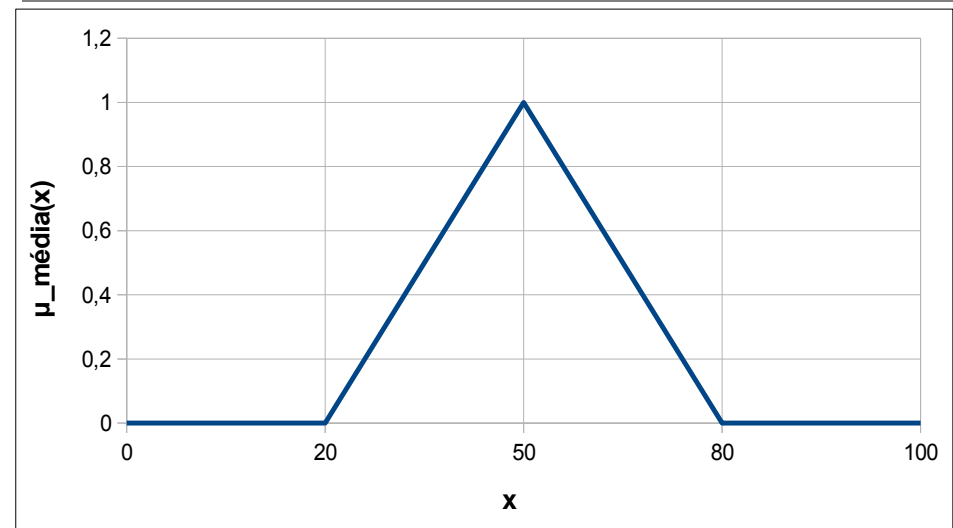
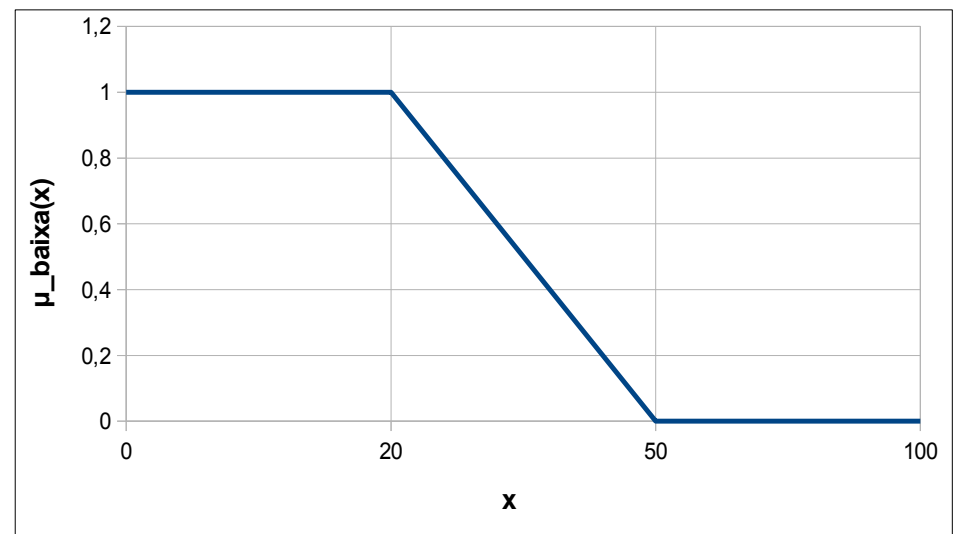
- É uma variável cujos valores são nomes de conjuntos nebulosos.
- Exemplos: Altura, Temperatura.
- Uma Variável Linguística assume valores, denominados **conjuntos nebulosos**.
- Assim,
  - Variável Linguística: Temperatura  
Valores (Conjuntos Nebulosos): baixa, média, alta;
  - Variável Linguística: Peso  
Valores (Conjuntos Nebulosos): magro, normal, gordo;

# Curvas de Fuzzificação

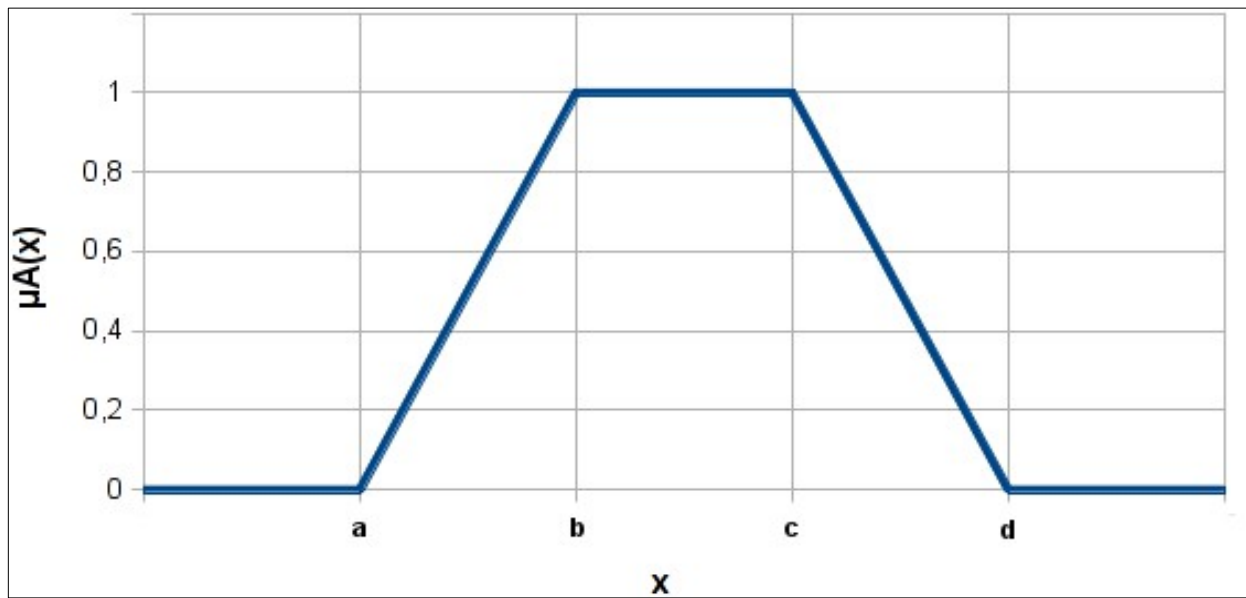
## Temperatura

O valor absoluto de 75°  
graus teria os seguintes  
graus de pertinência:

- \*  $\mu_{\text{baixa}}(75^\circ) = 0;$
- \*  $\mu_{\text{média}}(75^\circ) \cong 0,16;$
- \*  $\mu_{\text{alta}}(75^\circ) \cong 0,83.$



# Curvas de Fuzzificação e suas Equações



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{se } x > d \end{cases}$$

# Operações com Conjuntos Fuzzy

- Complemento (Negação):

$$\neg \mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$$

- União (Disjunção – OU Lógico):

$$\mu_{A+B}(x) = \text{máximo} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

- Interseção (Conjunção – E Lógico):

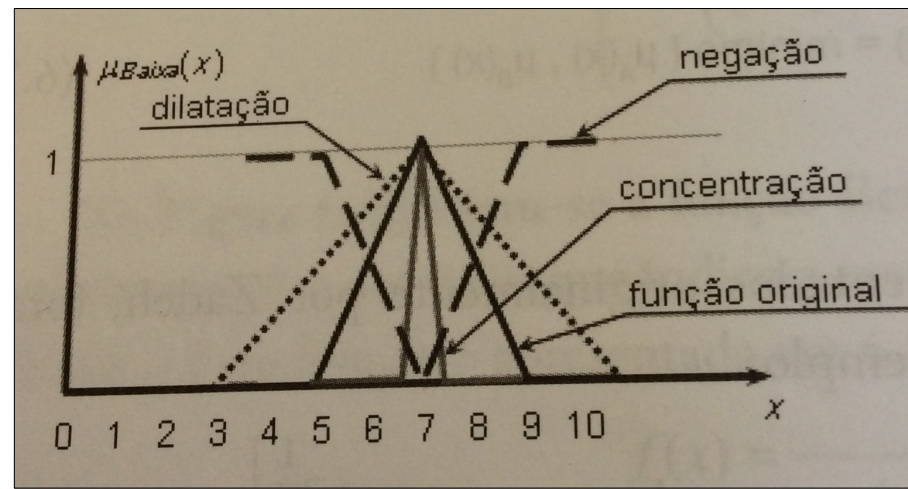
$$\mu_{A.B}(x) = \text{mínimo} \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

- Variações de operadores:

- Além destes apresentados originalmente por Zadeh, foram propostos vários outros que podem ser encontrados na literatura.

# Operações com Conjuntos Fuzzy

- Modificadores Linguísticos:
  - São transformações realizadas sobre os conjuntos nebulosos, objetivando modificar a função de pertinência do conjunto.



- São utilizados para representar os conceitos:
  - *Muito*:  $[\mu_A(x)]^2$
  - *Pouco*:  $\text{raiz\_quadrada}[\mu_A(x)]$
  - *Extremamente*:  $[\mu_A(x)]^3$
  - etc.

# Operações com Conjuntos Fuzzy

- Relações Nebulosas:
  - São as relações entre dois conjuntos nebulosos.
  - Inclusão:  
 $A \subset B$  se  $\mu_A(x) < \mu_B(x), \forall x \in U$
  - Equivalência:  
 $A = B$  se  $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U$
  - Desigualdade:  
 $A \neq B$  se  $\mu_A(x) \neq \mu_B(x), \forall x \in U$
- A representação também pode ser feita utilizando matrizes.

$R_1(U,V)$	0° C	25° C	50° C	75° C	100° C
Quente	0,0	0,25	0,50	0,75	1,0
Frio	1,0	0,75	0,50	0,25	0,0

# Operações com Conjuntos Fuzzy

- Produto Cartesiano:
  - Dentre as diversas definições para o produto cartesiano entre dois conjuntos nebulosos  $A \in U_1$  e  $B \in U_2$ . A mais simples é:

$$A \times B = \min\{ \mu_A(x) , \mu_B(x) \}$$

- Diferindo da operação de interseção, essa operação gera um **pares** de valores e **não** um valor único.

# Operações com Conjuntos Fuzzy

- Composição com o Produto Cartesiano:
  - Os problemas reais envolvem a composição de relações entre conjuntos universos;
  - O mais usual é realizar esta composição através de uma sequência de operações de máximo/mínimo;
  - Para resolvê-las, pode ser utilizada uma notação matricial.
- Exemplo:

$R_1(U_1, U_2)$	Frio	Calor
Primavera	<b>0,4</b>	<b>0,6</b>
Verão	0,0	1,0
Outono	0,6	0,4
Inverno	1,0	0,0

$R_2(U_2, U_3)$	Ventilador	Casaco	Guarda-chuva
Frio	<b>0,1</b>	0,9	0,6
Calor	<b>0,9</b>	0,1	0,4

$R(U_1, U_3)$	Ventilador	Casaco	Guarda-chuva
Primavera	<b>0,6</b>	?	?
Verão	?	?	?
Outono	?	?	?
Inverno	?	?	?

$$\mu(1;1) = \max[ \min(\mathbf{0,4} ; \mathbf{0,1}) , \min (\mathbf{0,6} ; \mathbf{0,9}) ] = \max[ \mathbf{0,1} ; \mathbf{0,6} ] = \mathbf{0,6}$$



# Operações com Conjuntos Fuzzy

- Operador Condicional:

- Na lógica clássica, o condicional “ $\rightarrow$ ” pode ser definido por:

$$a \rightarrow b \Leftrightarrow \sim a \vee b \Leftrightarrow \sim a + b \quad (\text{disjunção e negação})$$

$$a \rightarrow b \Leftrightarrow \sim(a \wedge \sim b) \Leftrightarrow \sim(a \cdot \sim b) \quad (\text{De Morgan})$$

- Na lógica nebulosa, tem-se:

- $\mu_{a \rightarrow b} = \text{máximo}\{ 1 - \mu_A(x), \mu_B(x) \} \quad (\sim a + b)$

- $\mu_{a \rightarrow b} = 1 - \text{mínimo}\{ \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \} \quad \sim(a \cdot \sim b)$

# Operações com Conjuntos Fuzzy

- Inferência Nebulosa:

- A inferência é realizada usando regras de produção nas quais o antecedente e o conseqüente são conjuntos nebulosos.
- Essas regras devem ser construídas com a ajuda de um especialista na área do problema a ser resolvido.
- Essas regras também representam o conhecimento necessário para a tomada de decisões.

- Exemplo de regra para um jóquei:

**SE** {  $\mu_{\text{leve}}(x)$  **E**  $\mu_{\text{baixo}}(x)$  } **ENTÃO**  $\mu_{\text{joquei}}(x)$

- Também é possível combinar mais de duas premissas. Isso sempre depende do problema a se resolver.

# Atividade

- Crie os conjuntos nebulosos *leve* e *baixo* para os valores da tabela abaixo.
- Após isso, *fuzzifique* estes valores para cada pessoa.
- Então, aplique a regra:

$$\mathbf{SE} \{ \mu_{\text{leve}}(x) \ \mathbf{E} \ \mu_{\text{baixo}}(x) \} \mathbf{ENTÃO} \ \mu_{\text{joquei}}(x)$$

- Lembre-se que:

$A \ \mathbf{E} \ B \rightarrow C$ , faz-se  $C = \text{mínimo}[ A , B ]$

$A \ \mathbf{OU} \ B \rightarrow C$ , faz-se  $C = \text{máximo}[ A , B ]$

Nome	Peso	Altura
Luis	100	1,90
José	95	1,50
Carlos	50	1,55

# *Defuzzificação*

- É o processo contrário a fuzzificação,
  - Transforma um valor Nebuloso (fuzzy) em um valor real;
  - O valor real é a resposta desejada em um sistema real;
  - Novamente, o especialista deve ajudar na construção das curvas de saída da defuzzificação.
- Os métodos mais comuns são:
  - Método do Critério Máximo;
  - Método do Centro Geométrico;
  - Método da Média do Máximo.

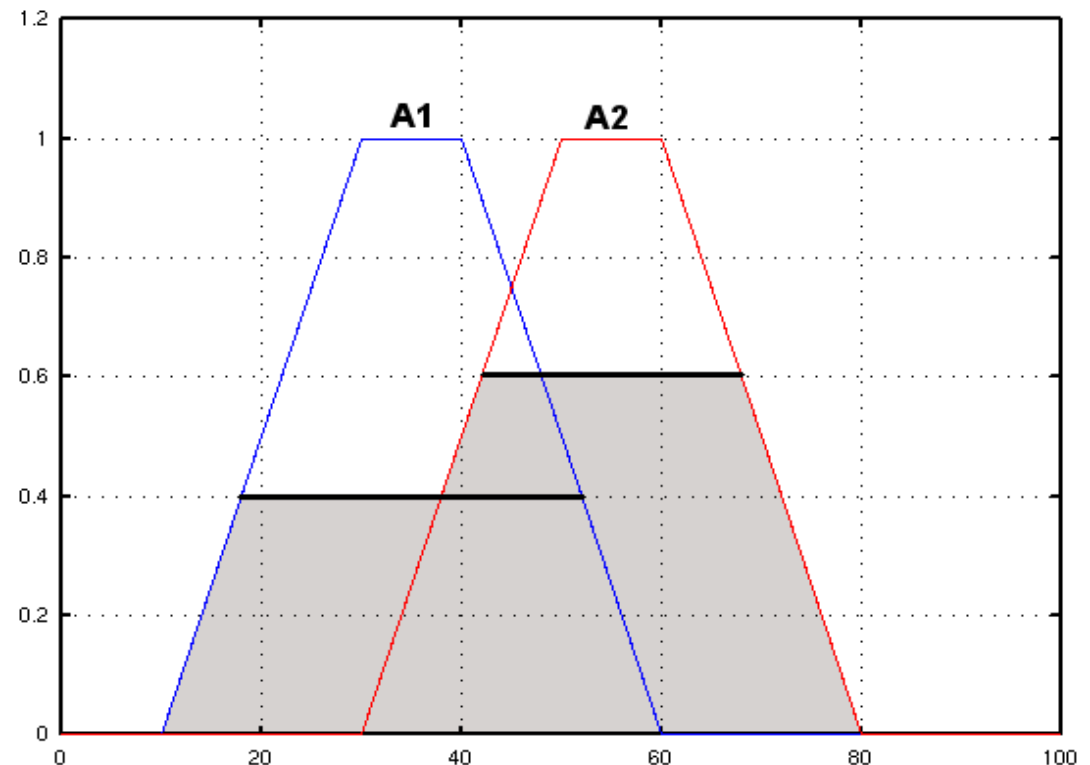
# Método do Critério Máximo

- É um dos mais simples métodos de defuzzificação;
- Sua saída é o valor correspondente ao conjunto que tem o maior grau de pertinência.
- Exemplo:
- Supondo que o resultado da defuzzificação seja  $x$ , então:

- $\mu_{A1}(x) = 0,4$ ;

- $\mu_{A2}(x) = 0,6$ ;

Como  $\max(0,4 ; 0,6)$ , então o elemento pertence à classe A2.



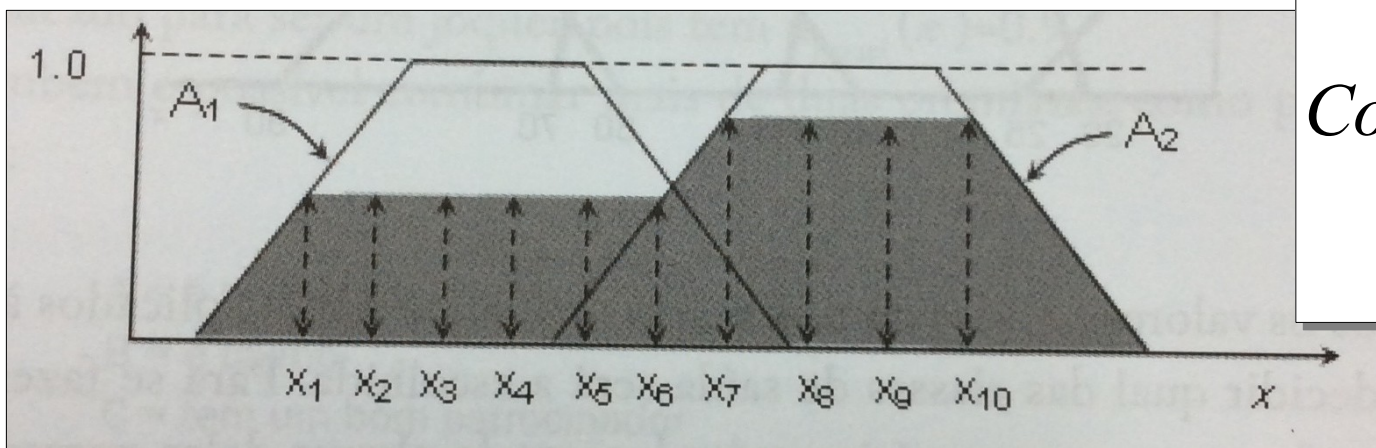
# Método do Centro Geométrico

- Também é conhecido como centro de área de gravidade.
- É um dos métodos mais conhecidos e utilizados na etapa de defuzzificação.
- É dado por:

$$C_{og} = \frac{\sum x \mu_A(x)}{\sum \mu_A(x)}$$

# Exemplo

- Supondo que tenhamos dois conjuntos: A1 e A2;
- Suponha que após realizar as inferências:
  - O maior valor obtido dentre as regras de A1 fosse 0,4; e
  - O maior valor obtido dentre as regras de A2 fosse 0,6.
- Ou seja,
  - Grau de pertinência do elemento no grupo A1 = 0,4;
  - Grau de pertinência do elemento no grupo A2 = 0,6.
- Então, é traçado um limiar nas curvas de defuzzificação e logo em seguida, calcula-se seu centro de gravidade:



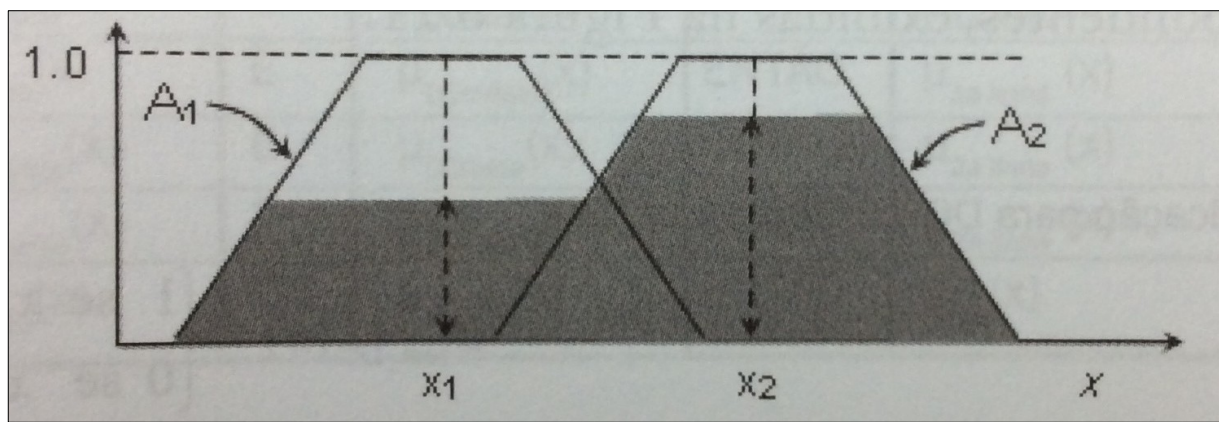
$$Cog = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i) \mu(x_i)}{\sum_{i=1}^{10} \mu(x_i)}$$

# Método da Média do Máximo

- A classe de saída é determinada a partir do valor máximo entre os máximos de cada conjunto:

$$MOM = \frac{\sum_{i=1}^n \max_{A_i} \mu_{A_i}(x)}{\sum_{i=1}^n \mu_{A_i}(x)}$$

Exemplo:



$$\text{Assim, } MOM = [x_1 \cdot \mu_{A_1}(x_1) + x_2 \cdot \mu_{A_2}(x_2)] / (x_1 + x_2)$$



# Referências

ARTERO, Almir Olivette. *Inteligência Artificial: teoria e prática*. Editora Livraria da Física: São Paulo, 2009.

BITTENCOURT, G. *Inteligência Artificial – ferramentas e teorias*. Editora da UFSC: Florianópolis, 1998.