Lógica Nebulosa

Adriano Joaquim de Oliveira Cruz
Universidade Federal do Rio de Janeiro

17 de junho de 2004

Sumário

1 Introdução **1**
1.1 Por que Lógica Nebulosa ("Fuzzy Logic")? . . . 1
1.2 História . . . 2
1.3 Sistemas Nebulosos em Produtos Comerciais . . . 3

2 Definições Básicas **5**
2.1 Introdução . . . 5
2.2 Representação de Informação . . . 5
2.3 Conjuntos Clássicos . . . 6
2.3.1 Operações Básicas em Conjuntos Clássicos . . . 7
2.3.2 Propriedades dos Conjuntos Clássicos . . . 8
2.4 Conjuntos Nebulosos . . . 9
2.4.1 Funções de Inclusão . . . 12
2.4.2 Terminologia de Conjuntos Nebulosos . . . 16
2.5 Operações com Conjuntos Nebulosos . . . 19
2.5.1 Propriedades de Conjuntos Nebulosos . . . 20
2.5.2 Comparando Operações Clássicas com Nebulosas . . . 22
2.6 T-norms e S-norms . . . 25
2.7 Operações Compensatórias e Não Zadeh . . . 26
2.7.1 Operações Algébricas . . . 27
2.7.1.1 Operador Produto . . . 28
2.7.1.2 Operadores Média . . . 29
2.7.1.3 Soma Limitada . . . 30
2.7.2 Operadores Baseadas em Funções . . . 31
2.7.2.1 Operadores Compensatórios de Yager . . . 32
2.8 Uma Interpretação Geométrica de Conjuntos Nebulosos . . . 35

3 Relações Clássicas e Relações Nebulosas **41**
3.1 Introdução . . . 41
3.2 Produto Cartesiano . . . 41
3.3 Relações Clássicas . . . 42
3.3.1 Cardinalidade de Relações Clássicas . . . 43
3.3.2 Propriedades de Relações Binárias Clássicas . . . 44
3.3.2.1 Relações de Equivalência e Tolerância . . . 45
3.3.3 Operações com Relações Clássicas . . . 46
3.3.4 Composição de Relação Clássicas . . . 48
3.3.4.1 Composição Max-Min . . . 48
3.3.4.2 Composição Máximo-Produto . . . 49
3.3.4.3 Composição Máximo-Média . . . 50
3.3.5 Relações Nebulosas . . . 50
3.3.6 Propriedades de Relações Nebulosas . . . 51
3.3.7 Operações com Relações Nebulosas . . . 52

3.3.8 Composição de Relações Nebulosas 53
3.3.8.1 Composição Max-Min 53
3.3.8.2 Composição Máximo-Produto 55
3.3.8.3 Composição Máximo-Média 55

4 Variáveis Nebulosas 57
4.1 Variáveis Nebulosas Linguísticas 57
4.1.1 Terminologia de Variáveis 58

5 Sistemas de Inferência Nebulosos 61
5.1 Introdução 61
5.2 Conceitos Básicos de Sistemas Nebulosos 61

6 Sistemas Híbridos Inteligentes 65
6.1 Características de Sistemas Inteligentes 65
6.1.1 Aquisi ção de Conhecimentos 65
6.1.2 Fragilidade 66
6.1.3 Baixo e Alto N ível de Raciocínio 66
6.1.4 Capacidade de Explicacão 66

Lista de Figuras

2.1 Uma possível definição do conjunto clássico das pessoas altas. 7
2.2 Definição nebulosa do conjunto nebuloso das pessoas altas. 9
2.3 Temperatura incluída em dois conjuntos difusos ao mesmo tempo. 10
2.4 Conjunto Nebuloso para Estatura Média. 12
2.5 (a) Função unimodal e (b) Função bi-modal 12
2.6 Função Singular. 13
2.7 Função clássica. 13
2.8 Função linear crescente. 14
2.9 Função triangular. 14
2.10 Função trapezoidal. 15
2.11 Função sigmóide crescente. 15
2.12 Conjunto nebuloso usualmente. 16
2.13 Função Beta. 16
2.14 Função perto de 5. 17
2.15 Suporte compacto e não compacto. 17
2.16 Função com suporte compacto e corte alfa. 18
2.17 Função com suporte não compacto e corte alfa. 18
2.18 Distância entre um ponto e a definição ideal do conjunto. 19
2.19 Exemplos de operações entre conjuntos. 21
2.20 Conjuntos de adultos e não adultos. 22
2.21 Conjuntos alto e meia idade nítidos. 22
2.22 Definição do conjunto (nebuloso) das pessoas altas. 24
2.23 Conjunto de pessoas de meia idade. 24
2.24 Operador AND de Zadeh. 28
2.25 Operador OR de Zadeh. 28
2.26 Operador AND com produto. 30
2.27 Operador OR produto. 31
2.28 Operador AND com média. 32
2.29 Operador OR com média. 32
2.30 Operador AND com soma limitada. 33
2.31 Operador OR com soma limitada. 34
2.32 Gráficos mostrando a influência do parâmetro k na função de negação de Yager. . 37
2.33 Conjuntos Representados como pontos. 38
2.34 Princípios de Aristóteles no Espaço. 38
2.35 Cardinalidade como Vetor. 39

3.1 Grafo da relação 3.3 43
3.2 Gráfico da expressão $y = x/2$ 44
3.3 Grafos ilustrando as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade. 45
3.4 Grafo de uma relação de equivalência. 46
3.5 Grafo de uma relação de tolerância 47
3.6 Composição de Relações 48

3.7 Relações R e S. 49
3.8 Diagrama da relação $R \circ S$ 50
3.9 Relações R e S. 54
3.10 Diagrama da relação T 55

4.1 Variável nebulosa temperatura. 57
4.2 Variável nebulosa correspondente a classificação de um aluno em função de sua nota. 58
4.3 Variável nebulosa completa e não completa. 59
4.4 Sobreposição de 50% em conjuntos nebulosos. 59

5.1 Gráficos mostrando como aumentar a precisão da aproximação nebulosa. 62
5.2 Diagrama em blocos de um sistema nebuloso. 62
5.3 Conjuntos nebulosos que definem a temperatura. 63
5.4 Conjuntos nebulosos que definem a velocidade. 63

Capítulo 1

Introdução

1.1 Por que Lógica Nebulosa ("Fuzzy Logic")?

No mundo real usamos palavras como: muito, pouco, grande, pequeno, freqüentemente, raramente, etc. para descrever situações. Estas situações não são nitidamente definidas e não podem ser precisamente descritas. Por exemplo, as frases abaixo são de uso corrente em nossa linguagem, e apesar de transmitirem informações imprecisas elas são usadas em tomadas de decisões:

- O carro está andando muito rápido, pise no freio.
- Ele é uma pessoa muito feliz.
- Esta sala é pequena para todos os alunos, reserve outra maior.
- Nesta cidade a temperatura freqüentemente está muito alta, por esta razão gastamos muita energia nos condicionadores de ar.

A descrição completa de um sistema real em muitos casos requer dados extremamente detalhados e muito além do que um ser humano poderia simultaneamente, processar e entender. No entanto, freqüentemente executamos tarefas complexas que para serem descritas precisam destes termos imprecisos que não pode ser modelados pela matemática tradicional de conjuntos. Podemos citar exemplos simples, que encontramos no nosso dia a dia:

- Preparação de pratos a partir de receitas.
- Estacionar um carro.
- Controlar uma carteira de investimentos.

Nestas atividades especialistas usariam frases como:

- Coloque no forno até ficar no ponto.
- Vire o volante um pouco para à direita.
- Se a taxa de juros subir muito e o déficit for alto poderemos ter uma recessão branda.

A Lógica Nebulosa provou ser capaz de aproximar complexos sistemas não lineares, com poucas regras deste tipo. Modelos Nebulosos tem as seguintes características:

- Utilizam regras que conseguem expressar as imprecisões e aproximações dos métodos de decisões dos especialistas.
- São mais fáceis de construir, entender, manter, testar.

- Podem ser prototipados em menos tempo.
- São mais robustos e conseguem trabalhar com falta de regras.
- Podem trabalhar com informações imprecisas.
- Podem chegar a conclusões de maneira paralela.
- Acumulam evidências contra e a favor de proposições.

Algumas desvantagens de Sistemas que utilizam lógica nebulosa são:

- É mais difícil desenvolver um modelo a partir de um sistema nebuloso;
- Embora sejam mais fáceis de construir e prototipar que sistemas convencionais, eles necessitam que sejam executadas mais simulações e necessitam de mais sintonia antes de serem definitivamente aprovados;
- Não tem uma definição matemática precisa e nítida como os sistemas tradicionais.

1.2 História

O estudo da nebulosidade (*fuzzyness*) começou no final do século XIX (KOSKO, 1997). Um conceito é nebuloso, ou vago, quando ele é indeterminado, indefinido, ou seja os seus limites são nebulosos, pouco definidos.

Embora conjuntos clássicos sejam a base de toda teoria matemática moderna, eles apresentam dificuldades quando aplicados a uma enorme classe de problemas do mundo real, entre estes estão os problemas nebulosos. A utilidade da lógica e da teoria dos conjuntos para a modelagem de sistemas é indisputada. No entanto, há sistemas complexos, onde não é possível conseguir equações que os descrevam completamente ou casos onde a dicotomia intrínseca da teoria dos conjuntos não consegue descrever a situação.

Considere o problema de definir o limite de um determinado conjunto. A definição deste limiar pode conduzir a paradoxos e a quebra da lei de Aristóteles conhecida como a lei da não contradição. Esta lei afirma que a intercessão de um conjunto com seu complemento é o conjunto vazio ($A \cap \overline{A} \equiv \emptyset$), ou seja um elemento não pode pertencer a um conjunto e ao seu complemento ao mesmo tempo.

O problema da definição do limiar leva ao *paradoxo Sorites*, atribuído ao dialético, Eubulides de Mileto, que era um adversário de Aristóteles. O paradoxo se enuncia com os seguintes termos:

> *"Quando um monte de areia deixa de ser um monte de areia, caso retiremos um grão de areia de cada vez?"*

O estudo da problema da indefinição na lógica interessou pensadores importantes como Bertrand Russel que fez as seguintes afirmações:

> *"Toda linguagem é vaga." "Indefinição, claramente, é uma questão de grau." "Toda lógica tradicional habitualmente assume que símbolos precisos estão sendo empregados. Portanto, não é aplicável à vida terrestre mas somente para uma imaginária existência celestial."*

Russel encontrou um outro paradoxo na teoria dos conjuntos, o paradoxo do mentirosos de Creta. Este paradoxo, também conhecido desde a antigüidade, pode ser enunciado da seguinte maneira: o poeta cretense diz que todos os cretenses mentem. Estará ele dizendo a verdade? Se ele mente, como todos, então ele diz a verdade. Se ele diz a verdade então ele está mentindo. Transferindo este paradoxo para os dias atuais e a teoria dos conjuntos podemos indagar: o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmo é um membro de si mesmo? Se ele não é então ele é. Caso ele seja então ele não é. Aqui temos que *A e não A* são possíveis e a lei da não contradição falha. Em 1923 Russel propôs que esta lei deveria ser relaxada para que os paradoxos e a indefinição das afirmações pudessem ser tratados (RUSSEL, 1923).

O matemático polonês Jan Lukasiewicz em 1920 desenvolveu a primeira lógica multivalorada ou nebulosa. Kaplan e Schott e outros matemáticos propuseram, na década de 50, as operações max e min para definir a álgebra dos conjuntos nebulosos.

O pesquisador que cunhou o termo "Fuzzy Logic", que traduziremos por Lógica Nebulosa, foi o professor Lotfy Zadeh da Universidade da Califórnia que em 1965 publicou o paper "Fuzzy Sets"(ZADEH, 1965). Este artigo usou *fuzzy* para significar *vague*, termo que era empregado usualmente na literatura técnica. Desde então *fuzzy* tem sido o termo mais comumente empregado. O estudo da lógica multivalorada é anterior a esta época, mas o professor Zadeh, praticamente sozinho, trouxe novamente para o primeiro plano o estudo desta teoria. A lógica nebulosa estende a lógica convencional incluindo o conceito de verdade parcial, valores entre totalmente verdade e totalmente falso. Em 1973 ele formulou o que passou a ser chamado de princípio da incompatibilidade.

Princípio 1.1 *A medida que a complexidade de um sistema aumenta, nossa habilidade para fazer afirmações precisas e que sejam significativas acerca deste sistema diminui até que um limiar é atingido além do qual precisão e significância (ou relevância) tornam-se quase que características mutuamente exclusivas.*

O pesquisador Ebrahim H. Mamdami do Queen Mary College em Londres, no ano 1977, aplicou a lógica nebulosa para criar um sistema baseado em regras nebulosas com a finalidade de controlar uma máquina à vapor (MAMDANI, 1977). Este sistema pode ser considerado o início da engenharia nebulosa (KOSKO, 1997).

1.3 Sistemas Nebulosos em Produtos Comerciais

A lógica nebulosa é empregada em diversos produtos comerciais, de aspiradores de pó até altos fornos em siderúrgicas, de sistemas para auxiliar na escolha de tacos de golfe até sistemas para negociar ações em bolsa.

Em 1976, a primeira aplicação comercial de lógica nebulosa foi desenvolvida pelas empresas Blue Circle Cement e SIRA na Dinamarca (YEN; LANGARI, 1999). O sistema controlava um forno de cimento incorporando o conhecimento de operadores experimentados para melhorar o desempenho do carvão siderúrgico por meio de uma moagem mais homogênea. Este sistema operou até 1982.

Um sistema emblemático é o que controla o metro na cidade japonesa de Sendai. O sistema opera uma linha de 13,6 km com 16 estações e foi desenvolvido pela Hitachi. O governo japonês exigiu testes exaustivos que incluíram 300.000 simulações e 3000 rodadas no metro vazio, antes de autorizar o funcionamento em 1987. Condutores humanos ainda controlam o sistema fora das horas de pico para manterem suas habilidades. Outra história de sucesso no Japão foi o desenvolvimento pela Fuji Electric de um sistema de tratamento de água. Estes dois sistemas levaram anos para serem colocados em funcionamento real devido a várias dúvidas sobre a eficácia e segurança dos sistemas nebulosos.

Em 1988 o governo japonês executou um cuidadoso estudo da viabilidade de criar projetos de pesquisa nacionais em lógica nebulosa envolvendo universidades e indústrias. Como resultado dois grandes projetos foram lançados pelo Ministério da Indústria e Comércio Internacional e a Agência de Tecnologia e Ciência. Somente o projeto lançado pelo Ministério, chamado de *Laboratory for International Fuzzy Engineering Research (LIFE)* englobava 50 companhias e tinha um orçamento de US$ 5.000.000.000,00 para serem gastos em seis anos.

Matsushita Electric Industrial Co. (Panasonic) foi a primeira companhia a aplicar lógica nebulosa em um produto para o consumidor, um chuveiro elétrico, em 1987. Em 1990, Matsushita lançou uma máquina de lavar controlada por um sistema nebuloso e lançou uma enorme campanha publicitária para popularizar o produto que tinha uma palavra estrangeira *fuzzy* em seu nome. O sucesso da campanha pode ser medido pelo fato de que esta palavra passou a ser usada no Japão com o significado de inteligência. *Fuzzy* ganhou a medalha de ouro para novas palavras no ano de 1990. Este sucesso levou outras empresas que produzem bens de consumo duráveis a lançar uma leva de produtos com lógica nebulosa: aspiradores de pó, máquinas para cozinhar arroz, refrigeradores, máquinas fotográficas, etc.

Este sucesso se espalhou pelo mundo e a Europa e em menor grau os Estados Unidos, onde a lógica nebulosa tinha sido "inventada", iniciaram projetos na área.

A difícil aceitação da lógica nebulosa na Europa e nos Estados Unidos foi atribuída por Bart Kosko a uma reação da mente ocidental aristotélica, acostumada a tudo classificar precisamente, à indefinição inerente aos sistemas nebulosos (KOSKO, 1994). A uma frase no final do primeiro capítulo da primeira parte deste livro de Kosko que, traduzida livremente, diz: "A lógica nebulosa começa onde a lógica ocidental termina".

Capítulo 2

Definições Básicas

2.1 Introdução

Na lógica tradicional Aristotélica os objetos são classificados em categorias muito bem definidas; um objeto pertence a uma categoria ou não; uma figura geométrica ou é um quadrado ou não; um animal é selvagem ou não. No mundo idealizado, estas separação em categorias ideais pode servir para classificar objetos e seres, no entanto no mundo real ela falha em um grande número de situações. Como definir exatamente quem é alto, ou quando uma temperatura está muito quente?

Usaremos os termos conjuntos clássicos ou nítidos (*crisp*) para nos referirmos aos conjuntos definidos a partir das operações da lógica tradicional. Neste capítulo apresentaremos as definições e as diferenças básicas entre conjuntos clássicos e nebulosos. Mostraremos as definições básicas de lógica nebulosa e como representar e operar com conjuntos nebulosos. Serão discutidas as várias formas alternativas de definir as operações básicas que podem ser realizadas sobre conjuntos nebulosos: união, intersecção e negação.

2.2 Representação de Informação

Os dados que representam informação são derivados de entidades existentes no mundo real. No entanto, estes dados tem propriedades características, e é necessário conhecê-las para que possamos tratar corretamente as informações do mundo real. Deste modo poderemos fazer associações coerentes entre os vários tipos de dados e as entidades que queremos representar.

Existem quatro tipos básicos de dados de acordo com a informação que eles contém.

Tipo Nominal: refere-se a uma entidade ou evento no qual não há relações de ordem e o único teste possível é de igualdade. Por exemplo, o nome de uma pessoa. Um possível conjunto deste tipo é o dos alunos de uma turma:

$$alunos = \{maria, ana, pedro\}$$

Notar que neste caso o elemento pertence ou não ao conjunto, e nenhuma outra informação está contida no dado.

Tipo Ordinal: um dado Ordinal identifica a posição de uma entidade ou evento em uma hierarquia cujos intervalos não são definidos exatamente. Por exemplo, a classificação de um aluno em ruim, médio, bom e excelente é de tipo Ordinal. Notar que o intervalo entre os elementos não pode ser definido com precisão.

$$aluno = \{ruim, médio, bom, excelente\} \tag{2.1}$$

Os dados podem ser comparados quanto a igualdade, superioridade e inferioridade. Um aluno excelente seria o que mais se aproxima da definição de aluno ideal para o professor. Isto implica que representar coisas indefinidas está intimamente ligado a expressar distâncias de um padrão ideal.

Conjuntos nebulosos podem representar dados cuja definição de inclusão se comporta como uma variável deste tipo.

Tipo Intervalo: representa dados cujos intervalos entre os valores na escala podem ser definidos com exatidão. No entanto, não há um ponto zero claramente definido. Um exemplo básico é o calendário onde o ano 2000 está 1000 anos depois do ano 1000. No entanto, como não temos a definição exata do início dos tempos, não se pode afirmar que o ano 2000 está duas vezes mais distante deste início. Dados deste tipo podem ser comparados quanto a igualdade, superioridade e podem ser subtraídos um dos outros. Conjuntos nebulosos podem ser projetados para incorporar este tipo de informação desde que o projetista assim o deseje.

Tipo Proporcional: Dados deste tipo são parecidos com os do tipo intervalo, com a diferença sendo a escala, que neste caso tem um zero absoluto. Por exemplo, é correto afirmar que 20 graus Kelvin são duas vezes mais quentes que 10 graus Kelvin. O mesmo não se pode afirmar em relação a temperaturas medidas em graus Célsius. Novamente, conjuntos nebulosos podem ser usados para representar este tipo de dados.

Podemos verificar então que conjuntos nebulosos podem representar estes dois últimos tipos de dados enquanto que conjuntos clássicos não os podem representar.

2.3 Conjuntos Clássicos

Um conjunto clássico, ou nitidamente definido, A é uma coleção de elementos ou objetos x existentes em um universo de discurso X $(A \subset X)$. Cada elemento x do universo pode pertencer ao conjunto A $(x \in A)$ ou não $(x \notin A)$.

Um conjunto clássico pode ser descrito de diversas maneiras. Podemos empregar os diagramas de Venn, que mostram graficamente os elementos que pertencem a um determinado conjunto. Outros modos são, por exemplo, podemos listar os elementos que pertencem ao conjunto, descrever analiticamente estes elementos ou usar uma função que ao assumir o valor 1 indica que o elemento pertence ao conjunto. Para indicar que o elemento não pertence pode-se usar o valor 0.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}
frutas\ iniciando\ com\ letra\ l &= \{laranja, limão, \ldots\} \\
números\ menores\, que\, 20 &= \{x \in \Re \mid x < 20\} \\
alto &= \begin{cases} 1 & se\, altura \geq 1,80 \\ 0 & se\, altura < 1,80 \end{cases}
\end{aligned}$$

No primeiro conjunto o universo de discurso é composto por todas as frutas e as frutas que pertencem ao conjunto começam com a letra l. O segundo conjunto é composto por todos os números reais menores que 20. Finalmente no último exemplo temos o conjunto de todas pessoas cujas alturas são maiores ou iguais a 1,80 m.

Caso exista uma função que defina se um elemento pertence ou não ao conjunto, esta função costuma se chamada de função característica ou de inclusão.

Definição 2.1 Função de Inclusão em Conjuntos Clássicos: *Um conjunto clássico A, definido em um universo de discurso X, pode ser definido pela sua função de inclusão $\chi \rightarrow \{0, 1\}$, que mapeia cada elemento de X em 1 ou 0 dependendo se o elemento é ou não um membro do conjunto. Isto pode ser representado por:*

$$\chi_A(x) \begin{cases} 1 & se\, x \in A \\ 0 & se\, x \notin A \end{cases} \tag{2.2}$$

Um conjunto clássico introduz um limiar que especifica quando um elemento deixa de participar de um conjunto. Por exemplo, podemos considerar que altos são todos os serem humanos cuja

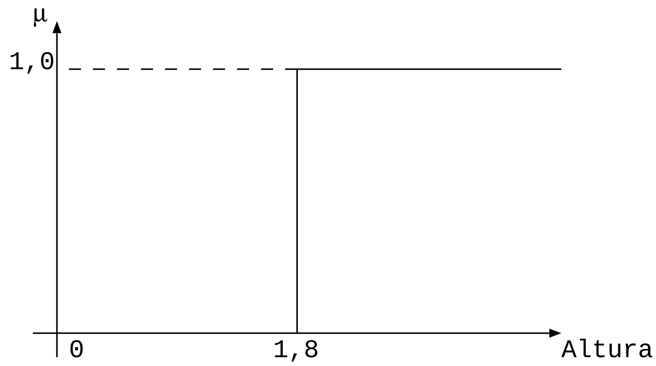

Figura 2.1: Uma possível definição do conjunto clássico das pessoas altas.

altura seja maior ou igual a 1,80 m (Figura 2.1). Uma dificuldade que surge é como escolher este limiar, que deve ser exato? Esta dificuldade leva ao, já mencionado, paradoxo de Sorites.

Qual o tamanho de um determinado conjunto A? Este tamanho ou a cardinalidade de um conjunto é definido pela contagem de todos os elementos que pertencem ao conjunto. Este número também pode ser chamado de número cardinal de A.

Definição 2.2 Cardinalidade de Conjuntos Clássicos: *A cardinalidade de um conjunto clássico A é medida pela contagem de todos os elementos que pertencem a este conjunto, e é denotada por $|A|$.*

A partir desta definição temos que conjuntos discretos que são compostos de um número finito e contável de elementos têm uma cardinalidade finita, ao passo que conjuntos contínuos compostos de um número infinito de elementos tem cardinalidade infinita.

Definição 2.3 Conjunto Potência de um Conjunto Clássico: *Dado um conjunto A, o conjunto potência de A é o conjunto de todos os subconjuntos de A. Este conjunto é denotado por 2^A.*

Exemplo 2.1: Seja um conjunto A, composto de três elementos, $A = \{1, 2, 3\}$, de maneira que a cardinalidade deste conjunto é $|A| = 3$. O conjunto potência de A é dado por:

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

A cardinalidade do conjunto potência de um conjunto A é denotada por $|2^A|$, e pode ser calculada como

$$|2^A| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$$

Caso a cardinalidade do conjunto seja infinita, então a cardinalidade do conjunto potência também é infinita.

Conjuntos podem conter subconjuntos. Um conjunto A é um subconjunto de B, denotado por $A \subset B$, se e somente se cada elemento de A é um elemento de B. O conjunto potência de B, 2^B contém todos os subconjuntos de B. Portanto, podemos dizer que o conjunto A é subconjunto de B se A pertence ao conjunto potência de B.

2.3.1 Operações Básicas em Conjuntos Clássicos

Sejam A e B dois conjuntos de um Universo X. A união entre estes dois conjuntos, denotada por $A \cup B$, representa todos os elementos que pertencem ou ao conjunto A, ao conjunto B, ou a ambos os conjuntos ao mesmo tempo. A intersecção dos dois conjuntos, denotada por $A \cap B$, representa todos aqueles elementos do universo X que simultaneamente pertencem a ambos os conjuntos A e B. O complemento do conjunto A, representado por $\bar{A}$, é definido como a coleção de elementos do universo X que não pertencem ao conjunto A. A diferença do conjunto A com respeito ao conjunto B, representada por $A \mid B$, é definida como a coleção de todos os elementos do universo que pertencem à A e que não pertencem à B. A união exclusiva entre os conjuntos A e B, representada por $A \oplus B$, é definida pelo conjunto dos elementos que pertencem à A e não pertencem à B ou pertencem à B e não pertencem à A. Em termos de símbolos matemáticos estas definições têm a seguinte forma:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A\, ou\, x \in B\} \tag{2.3}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A\, e\, x \in B\} \tag{2.4}$$
$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\, e\, x \in X\} \tag{2.5}$$
$$A \mid B = \{x \mid x \in A\, e\, x \notin B\} \tag{2.6}$$
$$A \oplus B = \{x \mid x \in A\, e\, x \notin B\, ou\, x \notin A\, e\, x \in B\} \tag{2.7}$$

Exemplo 2.2: Para mostrar o uso destes operadores vamos aplicá-los aos conjuntos A e B definidos abaixo. Vamos assumir que os elementos de A e B pertencem ao conjunto dos números inteiros.

$$\begin{array}{lcl} A & = & \{1,3,5,7,11,13,17\} \\ B & = & \{1,2,3,5,8,13,21\} \\ A \cup B & = & \{1,2,3,5,7,8,11,13,17,21\} \\ A \cap B & = & \{1,3,5,13\} \\ A \oplus B & = & \{2,7,11,17,21\} \\ A \mid B & = & \{7,11,17\} \\ \bar{A} & = & \{2,4,6,8,10,12,13,14,15,16,18,\ldots\} \end{array}$$

2.3.2 Propriedades dos Conjuntos Clássicos

Considere os conjuntos A, B e C definidos no conjunto universo X e o conjunto vazio $\emptyset$. A Tabela 2.1 mostra as principais propriedades dos conjuntos nitidamente definidos.

Tabela 2.1: Principais propriedades de conjuntos clássicos

Comutatividade	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associatividade	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotência	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Exclusão/Não Contradição	$A \cup \overline{A} = X$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Distributividade	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Absorção	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Involução	$\overline{\overline{A}} = A$	
Elementos Neutros	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap X = A$
	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup X = X$
Leis de DeMorgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Estas propriedades podem ser provadas usando-se os diagramas de Venn. As leis de DeMorgan são importantes na manipulação destas operações porque permitem que se transforme uma operação que usa união (intersecção) em intersecção (união).

Outras importantes propriedades são a **Lei da Não Contradição** ($A \cap \overline{A} = \emptyset$) e a **Lei da Exclusão do Meio** ($A \cup \overline{A} = X$). A Lei de Não Contradição estabelece que não é possível a um elemento pertencer ao mesmo tempo a um conjunto e ao seu complemento, isto é os limites entre os conjuntos são definidos muito nitidamente. Esta lei estabelece, por exemplo, que alguém não pode ser alto e não alto ao mesmo tempo. Nas palavras de Aristoteles (ARISTóTELES, 1969)

> "É impossível que o mesmo atributo pertença e não pertença ao mesmo sujeito, simultaneamente e sob a mesma relação... Não é possível, com efeito, conceber nunca que a mesma coisa seja e não seja.".

A Lei da Exclusão do Meio define que um elemento de um universo deve pertencer a um conjunto ou ao seu complemento, já que a união de um conjunto com seu complemento define todo o universo e portanto uma afirmação deve ser verdadeira ou falsa, não existe meio termo.

Existe uma relação entre operações sobre conjuntos e operações lógicas da álgebra Booleana, esta relação não é acidental. Se A, B e C representarem variáveis booleanas, $\cap$, $\cup$ e $\bar{A}$ forem substituídos por `E`, `OU` e `NÃO`, respectivamente, $\emptyset$ for equivalente à `FALSO` e X for `VERDADE`, todas as propriedades da Tabela 2.1 tornam-se propriedades básicas (axiomas) da álgebra Booleana.

Uma propriedade interessante da álgebra Booleana é o princípio da dualidade que estabelece:

Princípio 2.1 *Para qualquer lei da álgebra Booleana, se os símbolos de* `E`, `OU`, `FALSO` *e* `VERDADE` *forem intercambiados respectivamente por* `OU`, `E`, `VERDADE` *e* `FALSO`, *a equação resultante é uma lei válida da álgebra Booleana.*

A metade esquerda da Tabela 2.1 pode ser obtida aplicando-se este princípio à metade direita e vice-versa.

2.4 Conjuntos Nebulosos

Em conjuntos nítidos a transição entre um elemento pertencer a um conjunto ou não ocorre abruptamente, isto é, um elemento pertence ou não a um conjunto e ponto final. Em conjuntos nebulosos esta transição ocorre de forma gradual. Em conjuntos nebulosos a função de inclusão tem uma definição diferente daquela para conjuntos nítidos. As fronteiras entre os conjuntos não são nitidamente definidas e um elemento pode pertencer com um certo grau a um conjunto. Este grau pode variar entre zero e um inclusive.

Da mesma maneira que um conjunto clássico ou nítido pode ser definido pela sua função característica, um conjunto nebuloso (ZIMMERMANN, 1985) pode ser definido pela sua função de inclusão $\mu(.) \in [0, 1]$. Isto significa que um elemento pode ser membro apenas parcialmente de um conjunto. Vamos considerar o exemplo do conjunto das pessoas altas. A função de inclusão no conjunto de indivíduos altos pode, por exemplo, ter a forma da Figura 2.2.

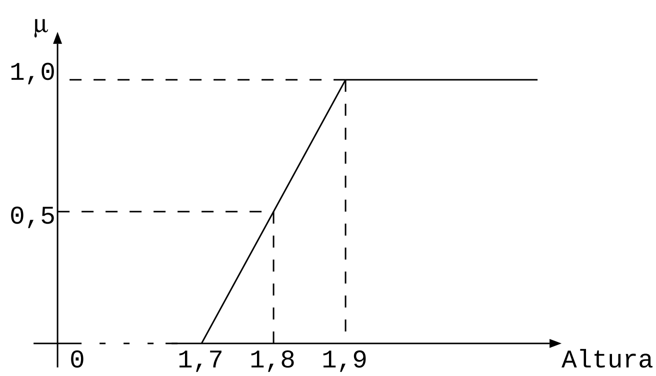

Figura 2.2: Definição nebulosa do conjunto nebuloso das pessoas altas.

Neste caso uma pessoa com altura 1,80 m pertence ao conjuntos dos altos com grau de inclusão de 0,5 e a que tem 1,90 m pertence ao conjunto com grau 1,0.

Definição 2.4 Função de Inclusão em Conjuntos Nebulosos: *A função de inclusão de um conjunto nebuloso A é definida no seu universo de discurso sendo caracterizada pela função* $\mu(.) : X \rightarrow [0,1]$ *que mapeia cada elemento de X em um número real no intervalo* $[0,1]$. *Para um particular elemento, a função representa o grau de inclusão do elemento no conjunto.*

Funções de inclusão são ferramentas matemáticas simples para indicar a participação em um determinado conjunto e para modelar o significado dos rótulos associados aos conjuntos. Uma questão importante que aparece neste instante é: como definir as funções de inclusão? Elas podem representar a maneira subjetiva pela qual um indivíduo entende uma determinada classe de objetos ou pessoas. Considere, por exemplo, a definição de uma pessoa alta mostrada na Figura 2.2, esta definição pode ser feita de diversas maneiras em função de características, geográficas, etárias, etc. Funções de inclusão podem ser obtidas de diversas maneiras. Por exemplo, funções podem ser criadas a partir das percepções dos especialistas sobre um determinado assunto. Outra maneira é obter estas funções a partir de medidas estatísticas. Estas funções, que foram definidas a priori, podem ser alteradas por resultados obtidos durante os testes do sistema no qual a lógica nebulosa foi empregada.

É importante ressaltar que funções de inclusão não estão relacionadas com probabilidades. Deste modo se uma pessoa tem uma altura igual a 1,8 ela pertence ao conjunto das pessoas altas com grau 0,5, segundo a nossa definição. Isto não significa que a probabilidade de encontrar no universo das pessoas alguém com altura 1,8 seja igual a 0,5.

De acordo com esta definição conjuntos nebulosos permitem os seguintes tipos de inclusão:

Inclusão com grau: um elemento pode pertencer a um conjunto com um certo grau de inclusão. Este tipo de definição permite interpretar a inclusão em um conjunto como tendo o significado que alguns elementos do conjunto são mais representativos da idéia geral do conjunto do que outros. Por exemplo, no caso do conjunto das pessoas altas uma pessoa de altura maior ou igual a 1,70 m *é mais representativa do conceito de pessoa alta* do que uma pessoa de 1,65 m.

Inclusão em diversos conjuntos: com este tipo de definição um elemento pode ser membro parcial de mais de um conjunto. Dependendo do grau de inclusão nos conjuntos é possível concluir a qual conjunto o elemento está mais fortemente ligado. Por exemplo, considere a Figura 2.3 que mostra as definições de dois conjuntos de temperaturas: médias e frias. Uma temperatura de 20^oC pertence aos conjuntos das temperaturas médias e frias. No entanto, ela pertence mais fortemente ao conjunto das temperaturas frias (grau de inclusão = 0,66) do que ao de temperaturas médias (grau de inclusão = 0,33), como está indicado na Figura 2.3.

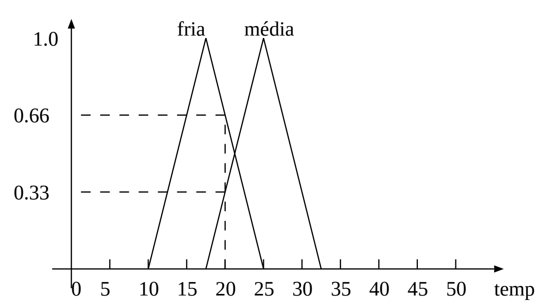

Figura 2.3: Temperatura incluída em dois conjuntos difusos ao mesmo tempo.

Na literatura aparecem diferentes maneiras de representar um conjunto nebuloso. Um conjunto nebuloso pode ser denotado como um conjunto ordenado de pares, sendo que o primeiro elemento do par é o elemento do conjunto propriamente dito e o segundo o grau de inclusão deste elemento no conjunto. Consideremos então uma coleção de objetos indicados genericamente por X. Portanto, um conjunto nebuloso A em X pode ser descrito como um conjunto de pares ordenados:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

onde $\mu_A(x)$ é grau de inclusão do elemento no conjunto ($\mu_A(x) \in [0,1]$). Para simplificar a notação, normalmente não se lista os elementos com grau de inclusão igual a zero.

Exemplo 2.3: Um professor resolveu classificar com definições nebulosas os seus alunos de acordo com as notas que eles obtiveram em sua disciplina. Vamos assumir que o conjunto de notas começa em 0 e vai até 10 sempre aumentando de 0,5 em 0,5 pontos, ou seja

$$X = \{0,\ 0,5,\ 1,\ldots,9,5,\ 10\}$$

Assim, o conjunto nebuloso A de alunos bons poderia ser definido, segundo a percepção deste professor, como

$$A = \{(6,5,\ 0,25),(7,\ 0,5),(7,5,\ 0,75),(8,1),(8,5,\ 0,75),(9,\ 0,5),(9,5,\ 0,25)\}$$

Observar que, o professor, para o mesmo tipo de dado (*aluno*) pode definir outros conjuntos como por exemplo: excelentes, ruins, médios, etc. Estes conjuntos podem se sobrepor, e portanto um aluno pode ser classificado em dois conjuntos ao mesmo tempo.

Uma notação que é usada mais freqüentemente indica a união de todos elementos que formam o conjunto de forma explícita, é a seguinte

$$A = \sum_{x_i \in X} = \mu_A(x_i)/x_i \tag{2.8}$$

O sinal de somatório na equação 2.8 é o indicador de união. Esta equação assume que o universo de discurso X é discreto. Nesta notação, o conjunto A de bons alunos pode ser definido como:

$$A = 6,5/0,25 + 7/0,5 + 7,5/0,75 + 8/1 + 8,5/0,75 + 9/0,5 + 9,5/0,25$$

Para um universo de discurso contínuo, a equação 2.8 é reescrita como

$$A = \int_X \mu_A(x)/x \tag{2.9}$$

Um conjunto nebuloso A também pode ser descrito diretamente por sua função de inclusão $\mu_A(x)$.

Exemplo 2.4: Um professor de educação física resolveu fazer uma classificação de seus alunos por altura, que fosse mais detalhada do que a ilustrada na Figura 2.2. A sua classificação está ilustrada na Figura 2.4 e inclui as seguintes categorias para estatura: baixa, média e alta. A equação característica do conjunto nebulos ***estatura média*** é

$$\mu_{média}(altura) = \begin{cases} 0 & se\, altura \leq 1,50 \\ 5 \cdot altura - 7,5 & se\, 1,50 \leq altura < 1,70 \\ -5 \cdot altura + 9,5 & se\, 1,70 \leq altura < 1,90 \\ 0 & se\, altura \geq 1,90 \end{cases}$$

Observar que um indivíduo com altura 1,60 está incluído em dois conjuntos. Ele pertence ao conjunto de estatura média com grau 0.5 e ao conjunto de estatura baixa com grau 0,5.

Exemplo 2.5: Conjunto A de números reais perto do número 10.

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid \mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2}\}$$

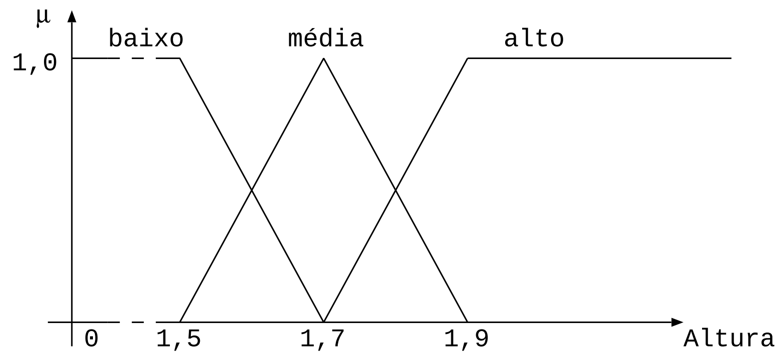

Figura 2.4: Conjunto Nebuloso para Estatura Média.

2.4.1 Funções de Inclusão

A maior parte das funções de inclusão utilizadas são do tipo unimodal. Este tipo de função garante que a variável terá somente influência *local* no problema. Por exemplo, considere o caso da função de definição do conjunto estatura média (Figura 2.4). Caso esta função fosse bimodal teríamos duas alturas como alturas média padrão.

Definição 2.5 Função Unimodal: *A função de inclusão é considerada unimodal (ou convexa) se*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1] : \mu(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min(\mu(x_1), \mu(x_2)\}$$

A Figura 2.5 ilustra um exemplo de função unimodal ou convexa e de uma função bimodal. Considere a função de inclusão unimodal $\mu_A(x)$ que indica quando um elemento x pertence ao conjunto A. Caso $\mu_A(x)$ seja maior que $\mu_A(y)$, podemos então interpretar que x está mais perto da definição ideal do conjunto A do que y.

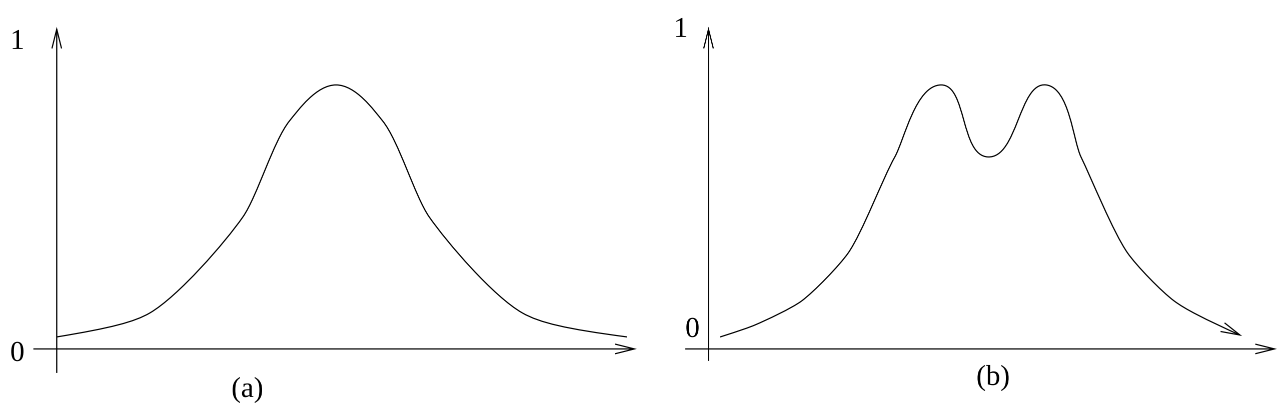

Figura 2.5: (a) Função unimodal e (b) Função bi-modal

Conjuntos Nebulosos podem ser denotados por diferentes funções, algumas delas também usadas em conjuntos clássicos com a mesma semântica. Isto serve para ilustrar o fato de que conjuntos nebulosos podem descrever conjuntos clássicos também, e formam um sistema mais geral.

Definição 2.6 Função Singular: *A função de inclusão é chamada de singular (singleton) quando*

$$Sing(x) = \begin{cases} 1 & se\, x = \bar{x} \\ 0 & se\, x \neq \bar{x} \end{cases}$$

A Figura 2.6 ilustra um exemplo de função singular. Um exemplo de uso funções singulares é representar números no sentido clássico.

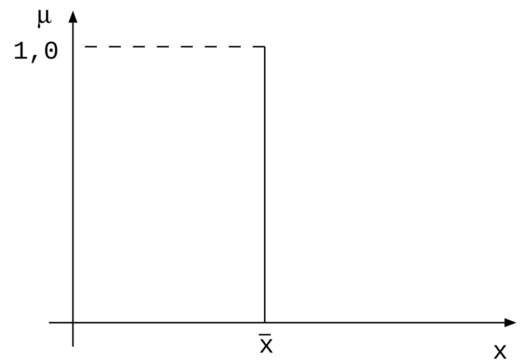

Figura 2.6: Função Singular.

Definição 2.7 Funções Clássicas: *Uma função clássica é definida por dois parâmetros x_1 e x_2, valor inicial e final do grau de inclusão igual a 1. A sua definição é*

$$C(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ 1 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & x > x_2 \end{cases}$$

São funções empregadas para definição de conjuntos clássicos e a Figura 2.7 ilustra uma função clássica. Uma função clássica representa um conjunto no sentido clássico. Observar que se o ponto da direita é deslocado para o infinito a função se torna semelhante à ilustrada na Figura 2.1. Esta é a definição normal de conjuntos clássicos. O mesmo pode ser feito com o ponto da esquerda.

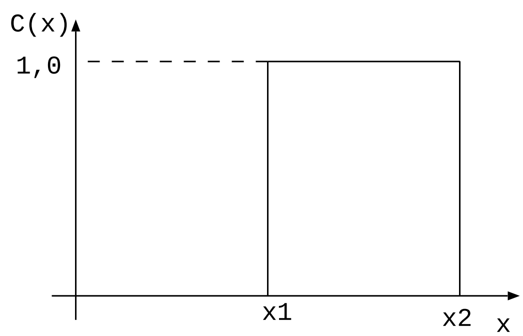

Figura 2.7: Função clássica.

Definição 2.8 Representação Linear: *A representação linear também é definida por dois parâmetros e tem a seguinte definição*

$$L(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & x > x_2 \end{cases}$$

Este é um dos mais simples conjuntos nebulosos. A Figura 2.8 ilustra um exemplo de função linear crescente. Funções deste tipo normalmente são usadas para representar conjuntos nebulosos nas extremidades do universo de discurso.

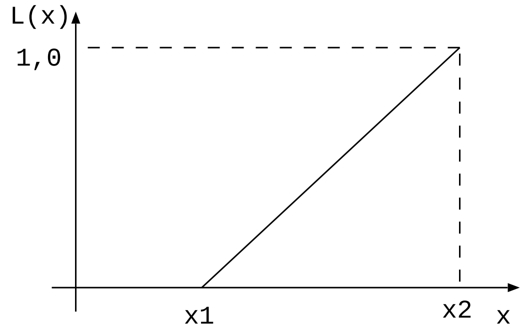

Figura 2.8: Função linear crescente.

Definição 2.9 Funções Triangulares: *A função triangular pode ser representada por três valores: o ponto à esquerda* x_1*, o ponto onde o grau de inclusão vale um* x_2 *e o ponto mais à direita* x_3*. A sua equação tem a seguinte forma*

$$Tri(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \frac{x_3-x}{x_3-x_2} & x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0 & x > x_3 \end{cases}$$

As funções triangulares são empregadas freqüentemente devido a simplicidade de representação e de utilização. A Figura 2.9 ilustra como um conjunto nebuloso é definido em termos de uma função triangular.

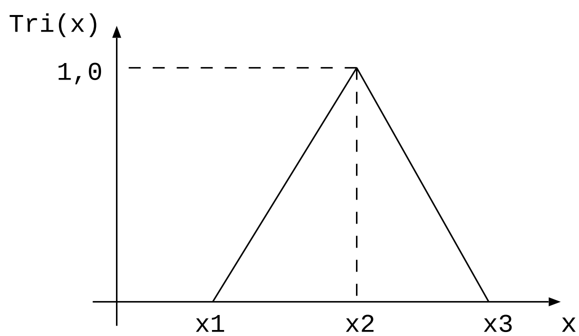

Figura 2.9: Função triangular.

Definição 2.10 Funções Trapezóidais: *A função trapezoidal é também muita usada pelas mesmas razões da função triangular. A função trapezoidal pode ser representada usando-se apenas 4 valores. A sua equação tem a seguinte forma*

$$Tra(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 1 & x_2 < x < x_3 \\ \frac{x_4-x}{x_4-x_3} & x_2 \leq x \leq x_3 \\ 0 & x > x_3 \end{cases}$$

A Figura 2.10 ilustra como um conjunto nebuloso é definido em termos de uma função trapezoidal.

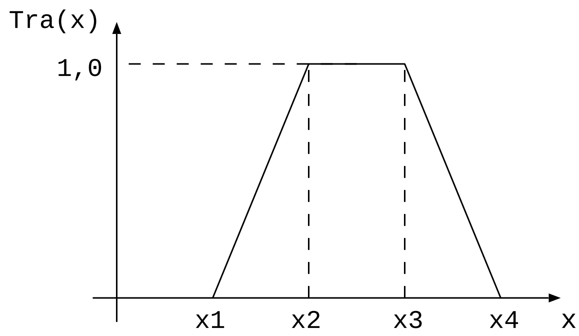

Figura 2.10: Função trapezoidal.

Definição 2.11 Função Sigmóide: *Uma função sigmóide é definida usando três parâmetros: seu valor 0 de inclusão (α), seu valor 1 de inclusão (γ) e o ponto de inflexão (β), que é o ponto onde o valor da função de inclusão vale 0.5. Assim a função pode ser definida como:*

$$S(x;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 0 & x \leq \\ 2 \cdot \left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x-\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \beta \leq \gamma \\ 1 & x \geq \gamma \end{cases} \tag{2.10}$$

A Figura 2.11 ilustra um exemplo de função sigmóide crescente.

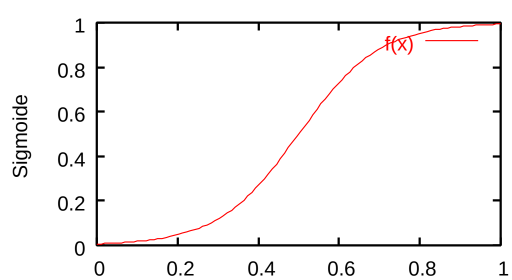

Figura 2.11: Função sigmóide crescente.

Um uso comum desta função aparece quando representamos freqüências. Por exemplo no conjunto *usualmente* onde o domínio é um conjunto de proporções (Figura 2.12).

Definição 2.12 Função Beta: *Uma função beta é definida com dois parâmetros, o valor em torno do qual a curva é construída (γ) e um valor que indica a metade da largura da curva no ponto de inflexão (β).*

Assim a função pode ser definida como:

$$B(x;\gamma,\beta) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^2}$$

A Figura 2.13 ilustra um exemplo de função beta.

Esta função aparece quando usamos os termos nebulosos *em torno*, *perto de*}, *aproximadamente*, etc. O parâmetro β define a forma da curva e, por exemplo, o quanto perto do valor central γ um valor x está.

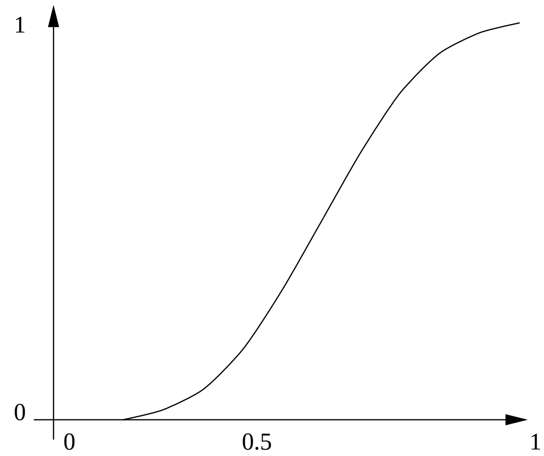

Figura 2.12: Conjunto nebuloso usualmente.

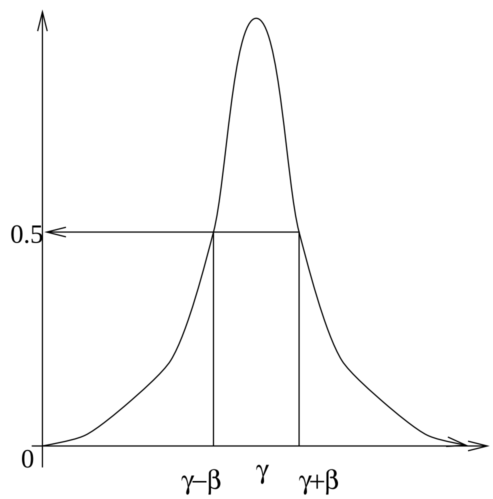

Figura 2.13: Função Beta.

Exemplo 2.6: O conjunto dos números reais perto do número 5 (Fig ra 2.14).

$$C(x) = \frac{1}{1-(x-5)^2}$$

2.4.2 Terminologia de Conjuntos Nebulosos

Definição 2.13 Suporte de um Conjunto Nebuloso: *O suporte de um conjunto nebuloso é um conjunto nítido A definido da seguinte maneira:*

$$S_A = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$

Um conceito relacionado ao de suporte é o de suporte compacto. O suporte é compacto quando seu tamanho é menor que o universo de discurso original, como está ilustrado na Figura 2.15. Caso a função de inclusão não seja compacta, veremos mais tarde que várias regras serão ativadas por cada entrada causando que o sistema seja sobrecarregado e o importante conceito de armazenamento e recuperação de conhecimento local possa ser perdido.

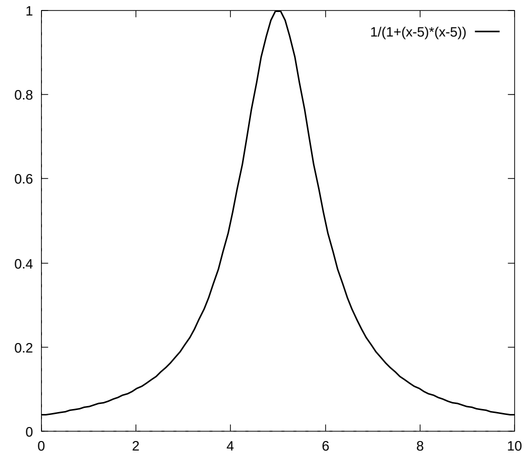

Figura 2.14: Função perto de 5.

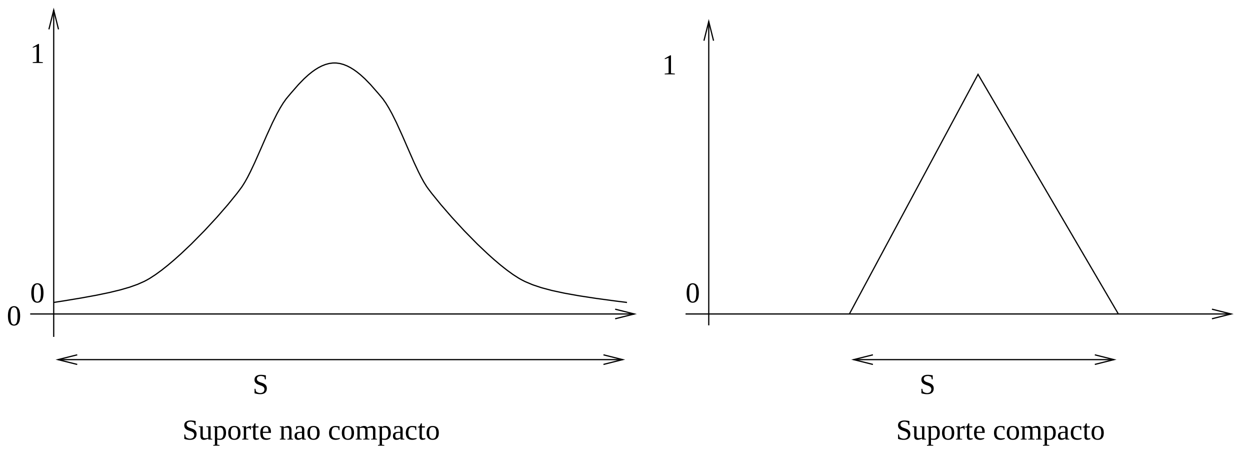

Figura 2.15: Suporte compacto e não compacto.

Exemplo 2.7: Considerando o exemplo 2.4 podemos verificar que o suporte do conjunto A é o conjunto $S_A = \{6.5, 7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5\}$.

Definição 2.14 Conjunto corte α: *O conjunto nítido de elementos que pertencem ao conjunto nebuloso A até pelo menos o grau α é chamado de conjunto corte α. O conjunto corte α é então definido como:*

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{2.11}$$

$$A'_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\} \tag{2.12}$$

O conjunto A' é chamado de conjunto corte α forte.

A Figura 2.16 mostra um conjunto nebuloso com função de inclusão triangular compacta e o corte α.

Qualquer função de inclusão unimodal com suporte não compacto pode ser transformada em uma função compacta, mas descontínua, com o corte α, como está mostrado na Figura 2.17.

Exemplo 2.8: Considerando novamente o conjunto do exemplo 2.4 temos os seguintes conjuntos:

$$A_{0.5} = \{7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0\}$$

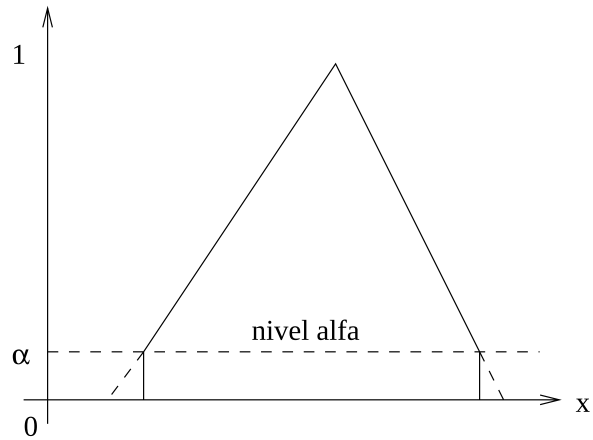

Figura 2.16: Função com suporte compacto e corte alfa.

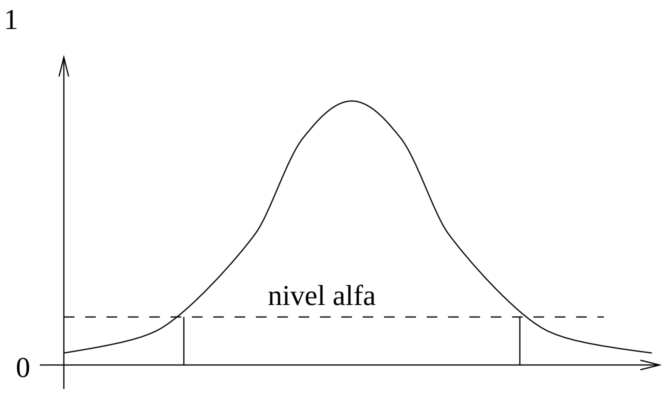

Figura 2.17: Função com suporte não compacto e corte alfa.

$$
\begin{aligned}
A'_{0.5} &= \{7.5, 8.0, 8.5\} \\
A_{0.75} &= \{7.5, 8.0, 8.5\}
\end{aligned}
$$

Definição 2.15 Cardinalidade: *Para um conjunto nebuloso finito A a cardinalidade $|A|$ é definida como*

$$| A |= \sum_{x \in X} \mu(x)$$

e a cardinalidade relativa de A é definida como

$$\|A\| = \frac{| A |}{| X |}$$

Exemplo 2.9: A cardinalidade do conjunto do exemplo 2.4 é igual a

$$| A |= 0.25 + 0.5 + 0.75 + 1.0 + 0.75 + 0.5 + 0.25 = 4.0$$

e a cardinalidade relativa é

$$\|A\| = \frac{4.0}{21} = 0.19$$

A cardinalidade relativa pode ser interpretada como a fração de elementos de X que estão em A, ponderados pelos graus de inclusão em A. Para conjuntos A infinitos a cardinalidade é definida como

$$A = \int_x \mu_A(x)dx$$

Claro que a cardinalidade não existe sempre.

Definição 2.16 Altura: *A altura de um conjunto nebuloso A é definida como*

$$H_A = \max_{x \in X}\{\mu_A(x)\} \tag{2.13}$$

e um conjunto é definido como normal se $H_A = 1$ e sub-normal no caso contrário.

Definição 2.17 Distância: *Mede a distância que um valor está da definição ideal do conjunto e é definida como*

$$d(A,x) = \begin{cases} \infty & se\, \mu_A(x) = 0 \\ \frac{1}{\mu_A(x)} - 1 & caso\, contrário \end{cases}$$

A Figura 2.18 ilustra este conceito.

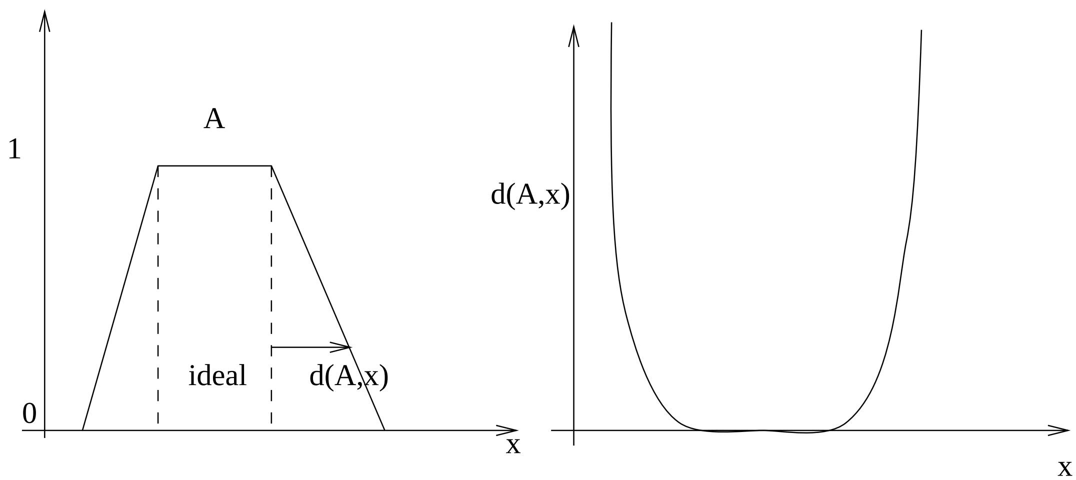

Figura 2.18: Distância entre um ponto e a definição ideal do conjunto.

2.5 Operações com Conjuntos Nebulosos

As operações com conjuntos nebulosos são definidas em termos das funções de inclusão. Zadeh (ZADEH, 1965) em 1965 apresentou um proposta de como aplicar estes conceitos aos conjuntos nebulosos.

Definição 2.18 União: *A função de inclusão $\mu_U(x)$ da união dos conjuntos nebulosos A e B ($U = A \cup B$) é definida como*

$$\mu_U(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)),\ x \in X \tag{2.14}$$

Definição 2.19 Intersecção : *A função de inclusão $\mu_I(x)$da intersecção dos conjuntos A e B ($I = A \cap B$) é definida como*

$$\mu_I(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))\, x \in X \tag{2.15}$$

Definição 2.20 Complemento ou Negação: *A função de inclusão $\mu_C(x)$ do complemento do conjunto A ($C = \overline{A}$) é definida como*

$$\mu_C(x) = 1 - \mu_A(x), x \in X \tag{2.16}$$

Estas fórmulas são equivalentes as operações clássicas quando o conjunto $[0,1]$ é reduzido para $\{0,1\}$. Existem outras extensões para as operações de intersecção ($\cap$), união ($\cup$) e negação que serão analisadas mais à frente.

Exemplo 2.10: Seja o conjunto de bons alunos A do exemplo 2.4, que repetimos aqui para facilitar. Assuma que o mesmo professor também classificou seus alunos por assiduidade. Assumir que o conjunto de medidas de assiduidade começa em 0 e vai até 10 sempre aumentando de 0.5 em 0.5 ponto. Onde 10 corresponde a 100% de presença e 0 a 0% de presença. Assim, os conjuntos nebulosos A e B de alunos bons e de alunos assíduos respectivamente foram definidos pelo professor como

$$\begin{aligned}
A(bons\,alunos) &= \{(6.5,0.25),(7,0.5),(7.5,0.75),(8,1),(8.5,0.75),(9,0.5),(9.5,0.25)\} \\
B(alunos\,ass\acute{\imath}duos) &= \{(6,0.25),(6.5,0.5),(7,0.75),(7.5,1),(8,1),(8.5,1),(9,1),(9.5,1),(10,1)\} \\
A \cup B &= \{(6,0.25),(6.5,0.5),(7,0.75),(7.5,1),(8,1),(8.5,1),(9,1),(9.5,1),(10,1)\} \\
A \cap B &= \{(6.5,0.25),(7,0.5),(7.5,0.75),(8,1),(8.5,0.75),(9,0.5),(9.5,0.25)\} \\
\bar{B} &= \{(0,1),(0.5,1),(1,1)(1.5,1),(2,1),(2.5,1),(3,1),(3.5,1),(4,1), \\
&\quad (4.5,1),(5,1),(5.5,1),(6.0.75),(6.5,0.5),(7,0.25)\}
\end{aligned}$$

A Figura 2.19 ilustra estes conjuntos e as operações.

2.5.1 Propriedades de Conjuntos Nebulosos

Vamos definir os conjuntos nebulosos A, B e C no conjunto universo X e o conjunto vazio $\emptyset$. As seguintes operações continuam valendo para conjuntos nebulosos:

Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

Associatividade: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

Idempotência: $A \cup B = A$, $A \cap A = A$;

Distributividade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

Absorção: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$;

Involução: $\overline{\overline{A}} = A$;

Elementos Neutros: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$;

Absorção: $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup X = X$

De Morgan: $\overline{(A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,

Existe uma diferença básica entre os conjuntos nebulosos e conjuntos nítidos. Há duas operações que não se mantém quando aplicada aos conjuntos nebulosa. Esta diferença está relacionada com as leis da Não Contradição ($A \cap \bar{A} \equiv \emptyset$) e da Exclusão do Meio ($A \cup \bar{A} \equiv X$).

Como na lógica nebulosa os conjuntos não são nitidamente definidos eles não obedecem a estas leis. Como exemplo, vamos considerar o conjunto dos adultos e dos não adultos definidos como mostrado na Figura 2.20. Vamos chamar o conjunto dos adultos de A e o seu complemento, os dos não adultos de $\bar{A}$.

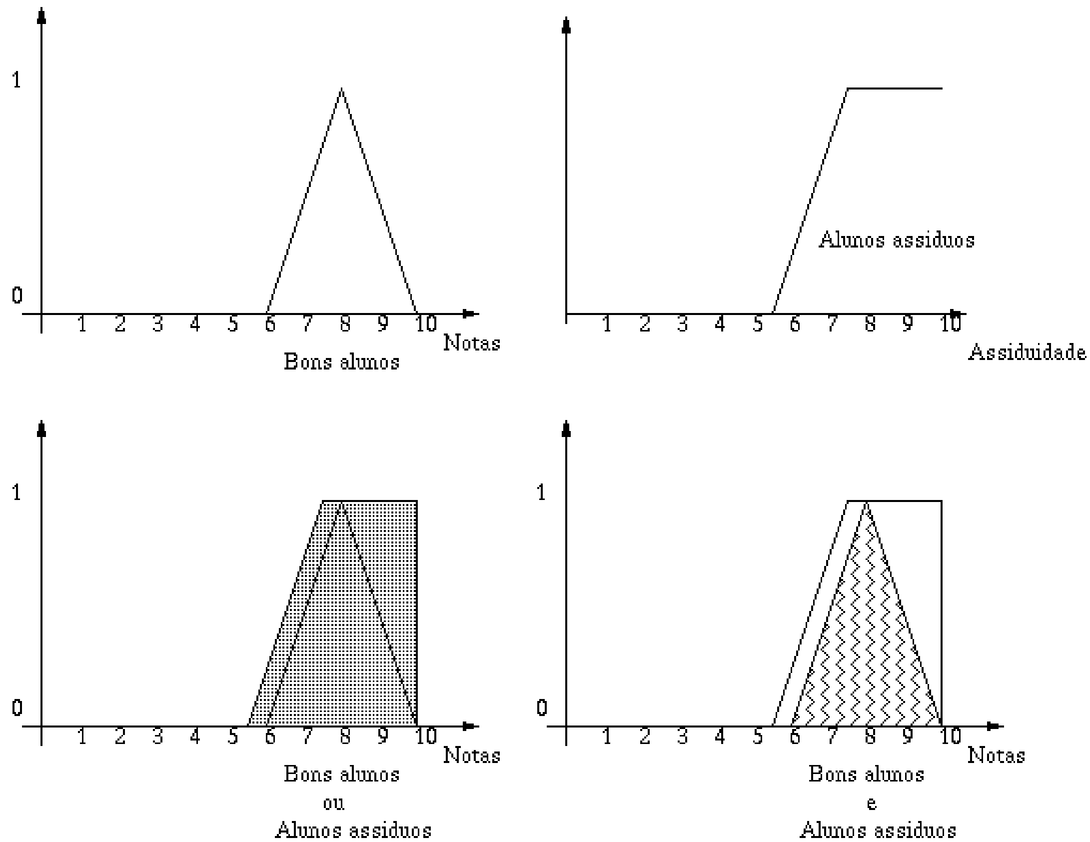

Figura 2.19: Exemplos de operações entre conjuntos.

A área sombreada mostra a a intersecção dos conjuntos. Observe que o conjunto não é vazio e alguém de 20 anos de idade pode ser considerado adulto e não adulto ao mesmo tempo.

Como um conjunto nítido satisfaz as leis da Não Contradição e da Exclusão do Meio e os conjuntos nebulosos não, Kosko ((KOSKO, 1994)) propôs que se usasse estes fatos para medir quão nebuloso um conjunto é. Ele denominou esta medida de *entropia nebulosa.*

Definição 2.21 Entropia Nebulosa: *Considere um conjunto nebuloso A. A entropia deste conjunto é definida pela fórmula:*

$$E(A) = \frac{c(A \cap \bar{A})}{c(A \cup \bar{A})} \tag{2.17}$$

onde c refere-se a uma contagem (adição ou integração) sobre o suporte do conjunto.

Observar que para um conjunto nítido o numerador é sempre 0 e o denominador é sempre 1, portanto a entropia de um conjunto nítido vale sempre 0.

A entropia é uma medida que refere-se somente ao conjunto, embora indiretamente sofra e receba influência do sistema completo através da influência dos conjuntos vizinhos.

Da Figura 2.20 podemos tirar os seguintes valores:

$$\begin{aligned} c(A \cap \bar{A}) &= 5 \\ c(A \cup \bar{A}) &= 20 + 20 - 5 = 35 \\ E(A) &= \frac{5}{35} = 0.14 \end{aligned}$$

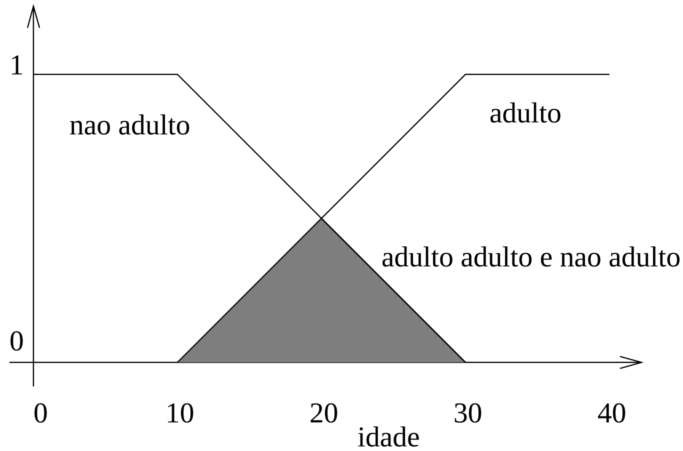

Figura 2.20: Conjuntos de adultos e não adultos.

2.5.2 Comparando Operações Clássicas com Nebulosas

Sistemas Nebulosos, como será visto mais adiante, são construídos com base em regras que tem a seguinte forma geral:

$$IF\, x\, IS\, X\, AND\, y\, IS\, Y\, THEN\, r\, IS\, R$$

Nesta regra os antecedentes são

$$x\, IS\, X\, AND\, y\, IS\, Y$$

Intersecção (AND) é a operação básica para a construção dos antecedentes da regras nebulosas. Por exemplo uma regra pode ser

$$IF\, water\, temperature\, IS\, low\, AND\, air\, temperature\, IS\, low\, THEN\, switch\, on\, water\, heater\, longer$$

Vamos conferir os efeitos da operação de intersecção comparando os efeitos das definições nítidas e nebulosas na solução de um problema exemplo. Para isto vamos considerar dois conjuntos: meia idade e alto. A definição nítida destes conjuntos está mostrada na Figura 2.21.

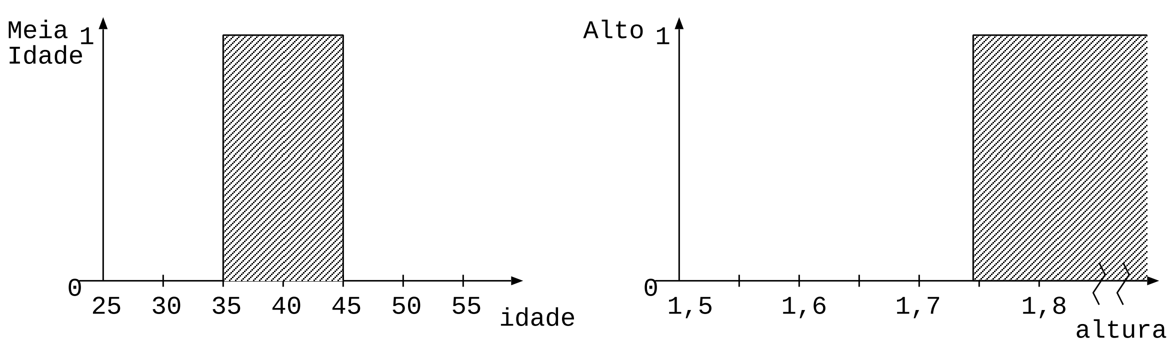

Figura 2.21: Conjuntos alto e meia idade nítidos.

A função de inclusão do conjunto meia idade é a seguinte:

$$\mu_{meia\, idade}(idade) = \begin{cases} 0 & se\, idade < 35 \\ 1 & se\, 35 \leq idade \leq 45 \\ 0 & se\, idade > 45 \end{cases}$$

A função de inclusão do conjunto alto é a seguinte:

$$\mu_{alto}(altura) = \begin{cases} 0 & se\, altura < 1.70 \\ 1 & se\, altura \geq 1.70 \end{cases}$$

Considere os dados da Tabela 2.2 retirado de um banco de dados com informações sobre empregados de uma determinada empresa.

Tabela 2.2: Empregados, suas alturas e idades.

Nome	Altura	Idade
Ana	1.74	36
Antônio	1.83	58
João	1.69	64
José	1.87	32
Luiz	1.84	40
Maria	1.59	22
Paulo	1.79	47
Pedro	1.83	25

Supondo que desejamos responder, sobre os dados armazenados no banco, a seguinte pergunta: Quais empregados são de meia idade e altos ao mesmo tempo? Observando os dados da Tabela 2.2 e as duas funções de inclusão (Figura 2.21) podemos gerar a Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Empregados Altos E de Meia Idade

Nome	Alto	Meia Idade	Alto E Meia Idade
Ana	1	1	1
Antônio	1	0	0
João	0	0	0
José	1	0	0
Luiz	1	1	1
Maria	0	0	0
Paulo	1	0	0
Pedro	1	0	0

O resultado mostrado na Tabela 2.3 indica que dois dos funcionários (Ana e Luiz) estão dentro dos critérios estabelecidos pela consulta ao banco de dados pelos critérios nítidos.

Para refazer esta pergunta utilizando o critérios nebulosos precisamos definir o que significa nebulosamente *alto* e *meia idade*.

O conjunto das pessoas altas está definido na Figura 2.2. Para facilitar o entendimento repetimos o conceito na Figura 2.22. O conjunto de pessoas de meia idade é representado pela Figura 2.23. As respectivas funções de inclusão são as seguintes:

$$\mu_{alto}(altura) = \begin{cases} 0 & se\, altura \leq 1.70 \\ 5 \cdot altura - 8.5 & se\, 1.70 < altura < 1.90 \\ 1 & se\, altura \geq 1.90 \end{cases}$$

$$\mu_{meia\, idade}(idade) = \begin{cases} 0 & se\, idade \leq 30 \\ \frac{idade}{10} - 3 & se\, 30 < idade \leq 40 \\ \frac{-idade}{10} + 5 & se\, 40 < idade \leq 50 \\ 0 & se\, idade > 50 \end{cases}$$

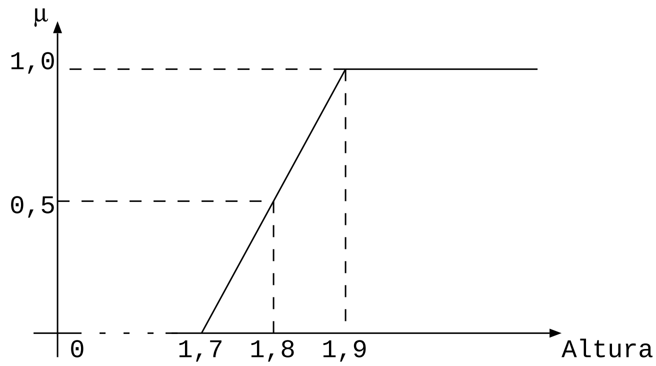

Figura 2.22: Definição do conjunto (nebuloso) das pessoas altas.

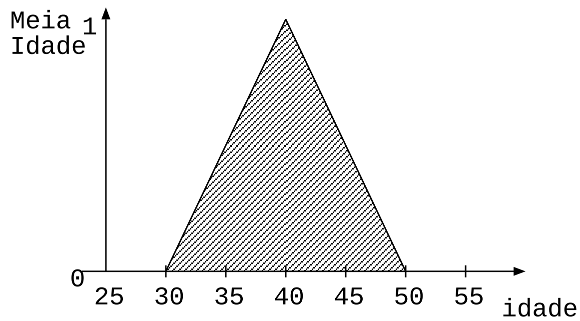

Figura 2.23: Conjunto de pessoas de meia idade.

Observar que utilizando conjuntos clássicos somente dois empregados estão dentro dos critérios estabelecidos, enquanto que pelos critérios nebulosos temos quatro. A utilização dos critérios nebulosos permite que elementos dos conjuntos que antes não seriam selecionados passem a fazer parte do conjunto solução .

Mas qual é a vantagem desta resposta ampliada. Critérios rígidos deixam de fora os elementos que estão próximos aos limites das funções de inclusão e que podem ser importantes escolhas de solução . Por exemplo, os funcionários José e Paulo que não foram incluídos na solução clássica, podem ser soluções razoáveis para a questão. O funcionário José certamente é alto (1,87 m) mas ficou de fora devido ao fato do critério de meia idade exigir idade maior que 35 anos, e ele tem 32 anos. Ora a sua inclusão na resposta nebulosa e perfeitamente razoável e dentro do senso comum. O funcionário Paulo também é alto (1,79 m), mas ficou de fora por ter 47 anos, dois a mais que a idade máxima.

Tabela 2.4: Empregados altos e de meia idade, nebulosamente.

Nome	Altura	$\mu_{alto}(altura)$	Idade	$\mu_{meia\,idade}(idade)$	Alto E Meia Idade
Ana	1.74	0.20	36	0.6	0.20
Antônio	1.83	0.65	58	0.0	0.00
João	1.69	0.00	64	0.0	0.00
José	1.87	0.85	32	0.2	0.20
Luiz	1.84	0.70	40	1.0	0.70
Maria	1.59	0.00	22	0.0	0.00
Paulo	1.79	0.45	47	0.3	0.30
Pedro	1.83	0.65	25	0.0	0.00

Para corrigir as falhas das definições dos conjuntos clássicos, não basta mover os limites dos conjuntos de forma a incluir os casos que ficaram de fora. Sempre que se move o limite, poderemos deixar de fora elementos que poderiam ser incluídos, ou incluir com força total no conjunto resposta elementos que só marginalmente atendem as condições desejadas.

Lembrar que na solução nebulosa os elementos selecionados recebem um grau que indica a força com que a resposta se assemelha a idéia que o usuário faz da resposta ideal. Podemos ver na Tabela 2.4 que o empregado Luiz é aquele que mais se aproxima da definição ideal de alto e meia idade. No entanto, Paulo que não consta da resposta clássica, tem um grau de inclusão (0.3) maior que o de Ana (0.2), que aparece na resposta clássica. Observar que os dois estão nos limites das definições.

2.6 T-norms e S-norms

Algumas questões podem surgir após a apresentação das definições das operações entre conjunto nebulosos:

1. Por que estas operações foram escolhidas para implementar as operações de intersecção e união?

2. Que justificativas matemáticas podem ser dadas para esta escolha?

3. Existem outras operações, que poderiam também ser empregadas?

Obviamente, como já foi mencionado, há outras operações que poderiam ser utilizadas, que se reduzem às operações clássicas com os valores 0 e 1. Estas operações devem obedecer a um conjunto de regras que as generalizam e são chamadas de T-norms e as S-norms. T-norms (Triangular-norms) generalizam a operação de Intersecção (AND, $\cap$) enquanto que S-norms (Triangular-conorms) fazem o mesmo com a operação de União (OR, $\cup$).

T-norms mapeiam $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ e devem satisfazer cinco axiomas. Para apresentar estes axiomas vamos usar a notação $T(x, y)$ para representar T-norms e sejam x, y, z e w os operados. Temos então:

1. $T(0,0) = 0$

2. $T(x, y) = T(y, x)$

3. $T(x, 1) = x$

4. $T[T(x, y), z] = T[x, T(y, z)]$

5. $T(z, w) \leq T(x, y)\, se\, z \leq x\, e\, w \leq y$

As primeiras e terceiras regras garantem que a operação pode ser reduzida a uma operação de união clássica. Além disso, a terceira regra garante a existência de um elemento neutro. A segunda regra garante que a ordem de avaliação da operação não influencia no resultado. A quarta regra assegura que podemos fazer a união de qualquer número de conjuntos em qualquer ordem quando fazemos a operação dois a dois. Finalmente a quinta regra assegura que uma diminuição no grau de inclusão no grau dos conjuntos não pode produzir um aumento no grau de inclusão da união dos conjuntos.

A operação de produto algébrico também é uma T-norm e pode ser usada para definir a operação de intersecção de conjuntos nebulosos. No entanto, existem outras operações que satisfazem a estes axiomas e que serão apresentadas mais adiante. Pode ser provado que para qualquer T-norm

$$T[\mu_A(x), \mu_B(y)] \leq \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{2.18}$$

e portanto a operação de mínimo é um limite superior para esta operação .

S-norms generalizam o conceito de operação de união. Elas mapeiam $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ e também satisfazem cinco axiomas. Para apresentar estes axiomas vamos usar o símbolo $S(x, y)$para representar S-norms e sejam x, y, z e w os operandos. Temos então:

1. $S(1,1) = 1$
2. $S(x,y) = S(y,x)$
3. $S(x,0) = x$
4. $S[S(x,y),z] = S[x,S(y,z)]$
5. $S(z,w) \leq S(x,y)\, se\, z \leq x\, e\, w \leq y$

As primeiras e terceiras regras garantem que a operação pode ser reduzida a uma operação de intersecção clássica. Além disso, a terceira regra garante a existência de um elemento neutro. A segunda regra garante que a ordem de avaliação da operação não influencia no resultado. A quarta regra assegura que podemos fazer a intersecção de qualquer número de conjuntos em qualquer ordem quando fazemos a operação dois a dois. Finalmente a quinta regra assegura que uma diminuição no grau de inclusão no grau dos conjuntos não pode produzir um aumento no grau de inclusão da intersecção dos conjuntos.

A operação de soma não é uma S-norm e não pode ser usada por critérios matemáticos para definir a operação de União de conjuntos nebulosos. Uma operação alternativa é a de soma limitada que é definido como:

$$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \times \mu_B(x)$$

Pode ser provado que para qualquer S-norm

$$\max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \leq S[\mu_A(x), \mu_B(y) \tag{2.19}$$

e portanto a operação de máximo é um limite inferior para esta operação. Os seguintes limites podem ser estabelecidos para S-norms e T-norms

$$T[\mu_A(x), \mu_B(y)] \leq \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \leq \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \leq S[\mu_A(x), \mu_B(y) \tag{2.20}$$

Operações baseadas nestas normas podem ser tornar restritivas e os chamados operadores de agregação são empregados para nebulizar a região entre as operações de mínimo e máximo que não são cobertas pelas normas. Portanto temos que

$$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.21}$$

onde A representa um operador de agregação. Um operador deste tipo bastante empregado é a média aritmética:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.7 Operações Compensatórias e Não Zadeh

Há um enorme esforço de pesquisa para definir formas nebulosas alternativas de operações entre conjuntos. A experiência prática tem demonstrado que tais formas alternativas são necessárias. Isto ocorre principalmente no caso da operação de intersecção, e em um grau menor no caso do complemento.

Estas operações são chamadas compensatórias porque elas procuram compensar as definições estritas dadas por Zadeh para os operadores AND, OR e NOT. Elas procuram fazer com que as relações entre proposições cujos valores estejam muito separados sejam menos sensíveis.

Vamos analisar estes problemas verificando o que ocorre com a operação de intersecção . Como uma operação de intersecção combina diversos conjuntos, utilizando a operação de mínimo, um único valor baixo pode mascarar todos os outros componentes. Isto traz problemas de desempenho nos controladores nebulosos. Controladores nebulosos trabalham com uma série de regras da forma IF antecedentes THEN conseqüente. Cada uma destas regras é avaliada e o peso de cada um dos conseqüentes, na solução final, é dado pelo resultado da operação de intersecção executada sobre os antecedentes. Portanto, um componente de uma regra que tenha um valor de função baixo pode fazer com que aquela regra não tenha peso relevante na solução do problema.

Vamos considerar uma regra exemplo e verificar como este mascaramento ocorre. Considere a seguinte regra

IF *preço* IS **baixo** AND *lucratividade* IS **alta** AND *endividamento* IS *baixo* THEN *compre* **muito**

Fazendo com que as variáveis assumam valores exemplo, podemos escrever

$$\mu_{muito}(compre) = min(\mu_{baixo}(preco), \mu_{alta}(lucratividade), \mu_{baixo}(endividamento) \quad (2.22)$$

$$\mu_{muito}(compre) = min(0.25, 0.98, 0.85) = 0.25 \quad (2.23)$$

Observe que o peso final da regra ficou igual 0.25, apesar de dois dos valores empregados fossem bem perto de 1.0.

Há dois tipos básicos de operações alternativas, aquelas baseadas em operações aritméticas simples e as baseadas em funções mais complexas. Exemplos de operações simples são: soma limitada, produto e média. A classe de funções de Yager é um exemplo do segundo tipo. A escolha do operador compensatório para um sistema particular requer alguma experiência e é geralmente feito heuristicamente, observando-se o efeito da proposta. Uma regra prática diz que deve-se procurar-se sempre começar pela solução mais simples. Primeiro testa-se os operadores de Zadeh, depois os operadores produto, média e soma limitada. Por último as funções mais complexas tipo as de Yager.

2.7.1 Operações Algébricas

A classe de operações alternativas ilustradas na Tabela 2.5, mudam a União e a Intersecção para outras operações algébricas simples. As operações de Zadeh estão mostradas na Tabela 2.5 para referência.

Tabela 2.5: Operações algébricas compensatórias de Intersecção e União

Tipo	**Intersecção**	**União**
Zadeh	$min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
$Product_1$	$\mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$\mu_A(x) + \mu_B(x) - (\mu_A(x) \times \mu_B(x))$
$Média$	$(\mu_A(x) + \mu_B(x))/2$	$(2 \times min(\mu_A(x), \mu_B(x)) + 4 \times (max(\mu_A(x), \mu_B(x)))/6$
$Média^2$	$Média^2$	$Média^2$
$Média^{\frac{1}{2}}$	$Média^{\frac{1}{2}}$	$Média^{\frac{1}{2}}$
Soma Limitada	$max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$	$min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$

Tabela 2.6: Tipos de operações algébricas compensatórias de Intersecção e União

Tipo	Intersecção	União
Zadeh	$\min(\mu_A(x), \mu_B(y))$	$\max(\mu_A(x), \mu_B(y))$
Produto	$\mu_A(x) \times \mu_B(y)$	$\mu_A(x) + \mu_B(y) - \mu_A(x) \times \mu_B(y)$
Média	$(\mu_A(x) + \mu_B(y))/2$	$(2 \times \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) + 4 \times \max(\mu_A(x), \mu_B(y)))/6$
Soma Limitada	$\max(0, \mu_A(x) + \mu_B(y) - 1)$	$\min(1, \mu_A(x) + \mu_B(y)$

Para facilitar as comparações entre estes operandos vamos mostrar gráficos e tabelas de cada uma das funções compensatórias. Como o padrão de comparação são os operadores de Zadeh, mostramos nas Figuras 2.24 e 2.25 os gráficos destes operadores. As tabelas 2.7 e 2.8 mostram alguns valores resultantes para cada uma destas operações.

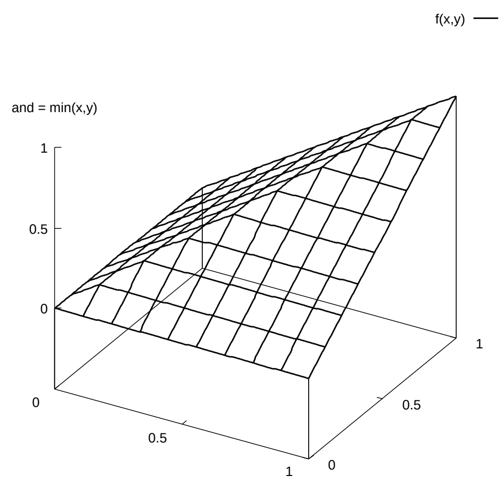

Figura 2.24: Operador AND de Zadeh.

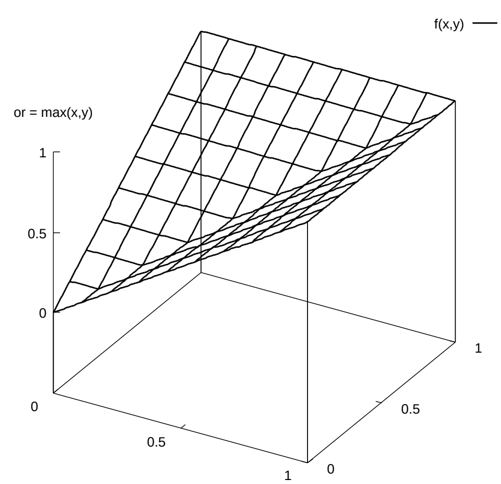

Figura 2.25: Operador OR de Zadeh.

2.7.1.1 Operador Produto

O operador produto tem a propriedade de respeitar as características min/max da operação de intersecção definida por Zadeh.

$$\begin{aligned} 0\ AND\ \forall(\mu_A(x)) &= 0 \\ 1\ AND\ \forall(\mu_A(x)) &= \mu_A(x) \end{aligned}$$

Uma outra característica interessante é que o produto muda para cada par de $(\mu_A(x), \mu_B(x))$. Isto não ocorre necessariamente quando se usa o operador mínimo.

As Figuras 2.26 e 2.27 mostram os gráficos destes operadores. As tabelas 2.9 e 2.10 mostram alguns valores resultantes para cada uma destas operações.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.0000	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
0.5000	0.0000	0.2500	0.5000	0.5000	0.5000
0.7500	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	0.7500
1.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000

Tabela 2.7: AND com operador mínimo $(min(\mu(x), \mu(y)))$.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.2500	0.2500	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.7500	1.0000
0.7500	0.7500	0.7500	0.7500	0.7500	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 2.8: OR com operador máximo $(max(\mu(x), \mu(y)))$.

2.7.1.2 Operadores Média

O operador média não é sensível em excesso para os valores mínimo% e máximo. Por exemplo, assumindo os seguintes valores:

$$\mu_A(x) = 0.94, \mu_B(x) = 0.58, \mu_C(x) = 0.23$$

Temos na operação definida por Zadeh

$$\mu_A(x) AND\ \mu_B(x) AND\ \mu_C(x) = 0.23$$

e na operação de média

$$(\mu_A(x) AND\ \mu_B(x)) AND\ \mu_C(x) \equiv ((0.94 + 0.58)/2 + 0.23)/2 = 0.495$$

Um problema é que a ordem de cálculo é importante. Caso a ordem em que os operandos aparecem seja modificada o resultado da expressão é alterado. Os mesmos valores, em outra ordem, fornecem o seguinte resultado

$$(\mu_C(x) AND\ \mu_B(x)) AND\ \mu_A(x) \equiv ((0.23 + 0.58)/2 + 0.94)/2 = 0.6725$$

As Figuras 2.28 e 2.29 mostram os gráficos destes operadores. As tabelas 2.11 e 2.12 mostram alguns valores resultantes para cada uma destas operações.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.0000	0.0625	0.1250	0.1875	0.2500
0.5000	0.0000	0.1250	0.2500	0.3750	0.5000
0.7500	0.0000	0.1875	0.3750	0.5625	0.7500
1.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000

Tabela 2.9: AND com operador produto $(\mu(x) * \mu(y))$.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.2500	0.2500	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.7500	1.0000
0.7500	0.7500	0.7500	0.7500	0.7500	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 2.10: OR para o operador produto $((\mu(x) + \mu(y)) - (\mu(x) * \mu(y)))$.

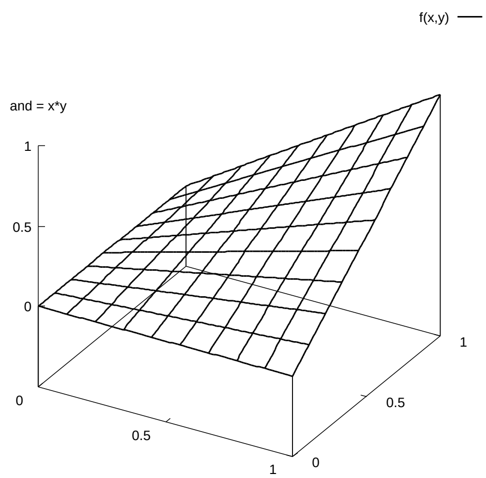

Figura 2.26: Operador AND com produto.

2.7.1.3 Soma Limitada

As Figuras 2.30 e 2.31 mostram os gráficos destes operadores. As tabelas 2.13 e 2.14 mostram alguns valores resultantes para cada uma destas operações.

É interessante notar que o operador soma limitada obedece a lei da exclusão do meio como conseqüência da forma como o operador foi definido. Vamos considerar um valor $\mu_A(x)$, o seu complemento é dado pelo valor

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

A operação de intersecção com o operador mínimo aplicada a estes valores fornece

$$\mu_{\bar{A}}(x)\ AND\ \mu_A(x) = min(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_A(x)),$$

Tabela 2.11: AND com operador média $((\mu(x) + \mu(y))/2.0)$.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.1250	0.2500	0.3750	0.5000
0.2500	0.1250	0.2500	0.3750	0.5000	0.6250
0.5000	0.2500	0.3750	0.5000	0.6250	0.7500
0.7500	0.3750	0.5000	0.6250	0.7500	0.8750
1.0000	0.5000	0.6250	0.7500	0.8750	1.0000

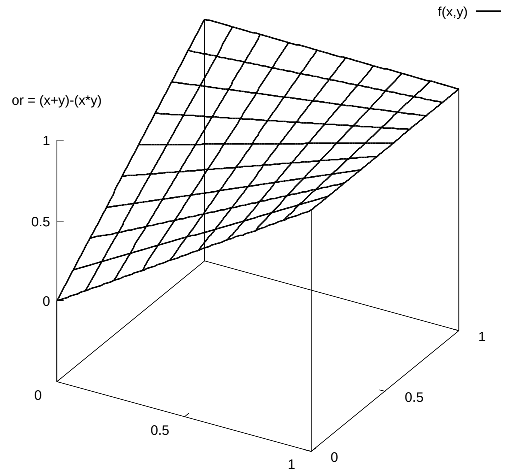

Figura 2.27: Operador OR produto.

Tabela 2.12: OR para o operador média $((2 * min(\mu(x) + \mu(y)) + 4 * max(\mu(x) * \mu(y)))/6)$.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.1667	0.3333	0.5000	0.6667
0.2500	0.1667	0.2500	0.4167	0.5833	0.7500
0.5000	0.3333	0.4167	0.5000	0.6667	0.8333
0.7500	0.5000	0.5833	0.6667	0.7000	0.9167
1.0000	0.6667	0.7500	0.8333	0.9167	1.0000

enquanto que esta operação com o operador soma limitada fornece

$$\mu_{\bar{A}}(x)\ AND\ \mu_A(x) = max(0, \mu_{\bar{A}}(x) + \mu_A(x) - 1) = 0$$

Isto significa que neste aspecto esta operação está mais próxima da lógica Booleana do que da nebulosa.

2.7.2 Operadores Baseadas em Funções

A classe de operações alternativas ilustradas na Tabela 2.15, mudam a União e a Intersecção para funções mais complexas. As operações de Zadeh estão mostradas na Tabela para referência.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2500
0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2500	0.5000
0.7500	0.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500
1.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000

Tabela 2.13: AND com soma limitada $max(0, \mu(x) + \mu(y) - 1)$.

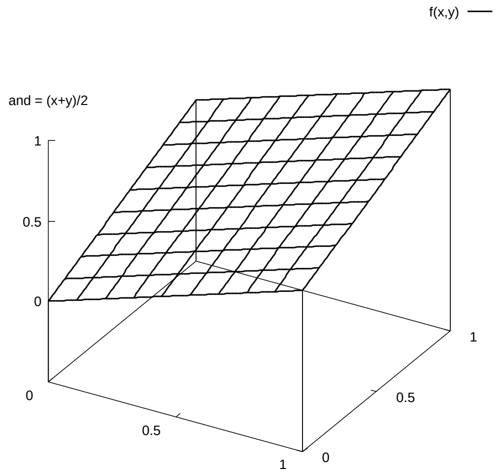

Figura 2.28: Operador AND com média.

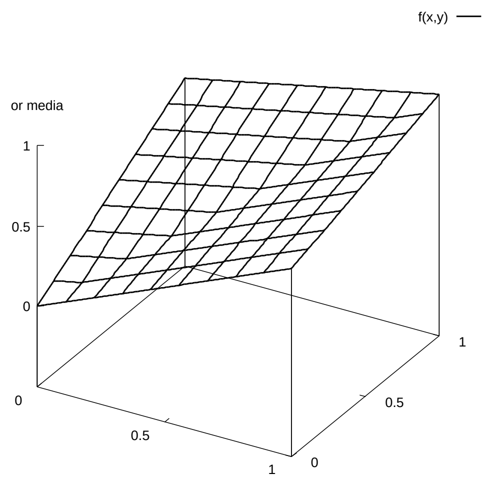

Figura 2.29: Operador OR com média.

2.7.2.1 Operadores Compensatórios de Yager

Propostos por Ron Yager do Instituto para Inteligência da Máquina do Iona College. Estes operadores tem um parâmetro k, que varia entre 0 e ∞, representando a força da conexão entre os conjuntos e são importantes na construção de modelos nebulosos corretos e verificáveis. Da mesma maneira que a lógica Booleana, devido a seu caráter nítido apresentar dificuldades em modelar o mundo real, o esquema mínimo/máximo freqüentemente resulta em um modelo que se comporta erraticamente quando os dados estão nos extremos do conjunto suporte. Neste caso podemos usar o parâmetro k para variar a nebulosidade do sistema.

Os operadores de união e intersecção de Yager convergem para os operadores max/min quando o parâmetro k torna-se muito grande. Os operadores OR e AND de Yager fornecem uma maneira fácil e flexível de sintonizar as intensidades das operações. Esta sintonia pode ser feita tanto para cada modelo como para cada operação do modelo.

Operador OR de Yager

A fórmula para o cálculo do operando OR é

$$\mu_{A\cup B} = \min\left\{1, \left[\mu_A(x)^k + \mu_B(x)^k\right]^{1/k}\right\} \tag{2.24}$$

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.2500	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000	1.0000
0.5000	0.5000	0.7500	1.0000	1.0000	1.0000
0.7500	0.7500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela 2.14: OR com operador soma limitada ($min(1, \mu(x) + \mu(y))$.

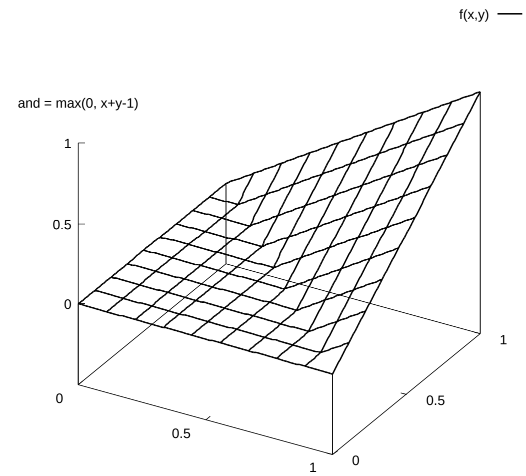

Figura 2.30: Operador AND com soma limitada.

Quando k é pequeno, a união responde para pequenos valores das funções, isto impõe uma forma fraca de união. A medida que k cresce a união responde para maiores valores até que se estabiliza em um máximo. Por exemplo, para $k = 1$ a função se torna

$$\mu_{A \cup B} = \min[1, \mu_A(x) + \mu_B(x)]$$

Quando $k \to \infty$ a função fica igual a $\max(a, b)$, no entanto, como este resultado não é óbvio apresentaremos agora uma prova.

Teorema 2.1 $\lim_{k \to \infty} \min \left\{1, \left[\mu_A(x)^k + \mu_B(x)^k\right]^{1/k}\right\} = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Para $\mu_A(x) = 0$, $\mu_B(x) = 0$ é obvio que o teorema é válido. Quando $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ o teorema também é válido porque o limite de $2^{1/w}$ quando $w \to \infty$ é igual a 1. Quando $a \neq b$ temos que o mínimo se reduz a $(\mu_A(x)^k + \mu_B(x)^k)$. Precisamos então provar que

$$\lim_{k \to \infty} (\mu_A(x)^k + \mu_A(x)^k)^{1/k} = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Vamos assumir, sem perda de generalidade que $\mu_A(x) < \mu_B(x)$ e vamos fazer $Q = (\mu_A(x)^k +$

Tipo	**Intersecção**	**União**
Zadeh	$min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Yager	$1 - min(1, ((1 - \mu_A(x))^k + (1 - \mu_B(x))^k)^{1/k})$	$min(1, (\mu_A(x)^k + \mu_B(y)^k)^{1/k})$

Tabela 2.15: Operações compensatórias baseadas em funções de Intersecção e União

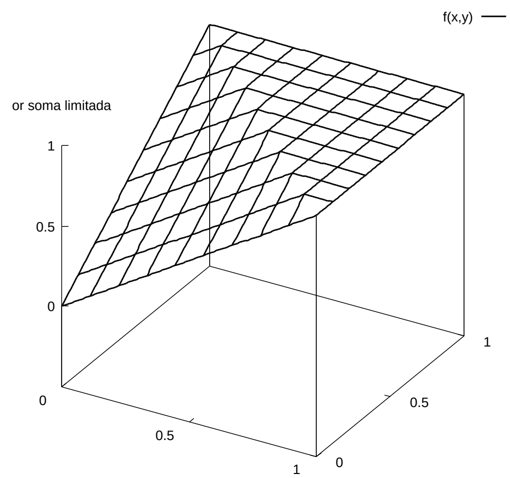

Figura 2.31: Operador OR com soma limitada.

$\mu_B(x)^k)^{1/k}$. Deste modo temos que

$$\lim_{k\to\infty} \ln Q = \frac{\ln\left(\mu_A(x)^k + \mu_B(x)^k\right)}{k}$$

Usando a regra de l'Hopital obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \ln Q = \lim \frac{\mu_A(x)^k \ln\, \mu_A(x) + \mu_B^k(x) \ln\, \mu_B(x)}{\mu_A(x)^k + \mu_B(x)^k}$$

$$\lim_{k\to\infty} \ln Q = \lim \frac{\frac{\mu_A(x)^k}{\mu_B^k(x)} \ln\, \mu_A(x) + \ln\, \mu_B(x)}{\frac{\mu_A(x)^k}{\mu_B(x)^k} + 1} = \ln\, \mu_B(x)$$

Portanto temos que

$$\lim_{k\to\infty} Q = \lim_{k\to\infty} (\mu_A(x)^k + \mu_A(x)^k)^{1/k} = \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Resta provar que o teorema ainda é válido quando o mínimo vale 1. Neste caso temos que

$$\begin{array}{rcl} (\mu_A(x)^k + \mu_A(x)^k)^{1/k} & \geq & 1 \\ \mu_A(x)^k + \mu_A(x)^k & \geq & 1 \end{array}$$

para todo w. Quando $w \to \infty$, a última desigualdade vale se a ou b forem iguais a 1, portanto o teorema fica provado.

As Tabelas 2.16, 2.17, 2.18 mostram os valores da operação de intersecção para três valores do parâmetro k. Observar que, do mesmo modo que na operação de intersecção , a operação de união de Yager tende para a operação de máximo (Tabela 2.8) a medida que k cresce.

Operador AND de Yager

A fórmula para o cálculo do operando AND é

$$\mu_{A\cap B}(x) = 1 - \min\left\{1, \left[(1-\mu_A(x))^k + (1-\mu_B(x))^k\right]^{1/k}\right\} \tag{2.25}$$

Quando k é pequeno a intersecção só responde para valores altos das funções de inclusão significando uma forma forte de intersecção. A medida que k cresce a função responde a valores cada vez menores das funções até estabilizar em um mínimo.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.2500	0.2500	0.2611	0.5000	0.7500	1.0000
0.5000	0.5000	0.5000	0.5221	0.7501	1.0000
0.7500	0.7500	0.7500	0.7501	0.7832	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	0.1000	1.0000

Tabela 2.16: OR de Yager para $k = 16$.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.2500	0.2500	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.7500	1.0000
0.7500	0.7500	0.7500	0.7501	0.7582	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	0.1000	1.0000

Tabela 2.17: OR de Yager para $k = 64$.

Novamente não é óbvio que para $k \to \infty$ a função se reduz a $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$. Para provar esta afirmação nós podemos considerar que a partir

As Tabelas 2.19, 2.20, 2.21 mostram os valores da operação de intersecção para três valores do parâmetro k. Observar que a medida que k cresce a operação de intersecção de Yager se aproxima da operação de intersecção de Zadeh (Tabela 2.7).

Operador Negação de Yager

Yager também definiu uma operação de negação com uma forma similar as usadas nas operações de união e intersecção . A equação que define esta operação é a seguinte:

$$\mu_{\hat{A}}(x) = (1 - \mu_A(x)^k)^{\frac{1}{k}} \tag{2.26}$$

onde o valor de k deve estar no intervalo $[0, 5]$. Para $k = 1$ a função se reduz a função definida por Zadeh ($\mu_{\hat{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$). A Figura 2.322.32 mostra como o valor de k influencia a operação de Negação de Yager.

2.8 Uma Interpretação Geométrica de Conjuntos Nebulosos

L. A. Zadeh foi o primeiro a introduzir idéia que um conjunto nebulos pode ser visto como um ponto em um hipercubo (ZADEH, 1971). Bart Kosko (KOSKO, 1992) extendeu a idéia e fez novas contribuições para a teoria. Usando conceitos geométricos ele encontrou respostas para algumas das perguntas fundamentais para a Lógica Nebulosa: quão nebuloso é um conjunto nebuloso? quanto um conjunto nebuloso é um subconjunto de outro?

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.2500	0.2500	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.7500	1.0000
0.7500	0.7500	0.7500	0.7500	0.7500	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	0.1000	0.1000	1.0000

Tabela 2.18: OR de Yager para $k = 128$.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.0000	0.2168	0.2499	0.2500	0.2500
0.5000	0.0000	0.2499	0.4779	0.5000	0.5000
0.7500	0.0000	0.2500	0.5000	0.7389	0.7500
1.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000

Tabela 2.19: AND de Yager para $k = 16$.

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.0000	0.2418	0.2500	0.2500	0.2500
0.5000	0.0000	0.2500	0.4946	0.5000	0.5000
0.7500	0.0000	0.2500	0.5000	0.7473	0.7500
1.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000

Tabela 2.20: AND de Yager para $k = 64$.

Os profissionais da área costumam usar funções que mapeiam um domínio X no intervalo $[0, 1]$ para representar conjuntos nebulosos. Estas funções podem representar a semântica do conjunto. Para representar conjuntos nebulosos usando a geometria continuaremos usando este mesmo domínio e intervalo. Para simplificar vamos considerar que o domínio X é definido como $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. O que é então um conjunto nebuloso A, definido neste domínio, quando ele é representado geometricamente? A reposta é um ponto dentro de um hipercubo unitário de n dimensões.

Considere como exemplo um conjunto com dois elementos $X = \{x_1, x_2\}$. O hiper cubo neste caso tem duas dimensões, ou seja um quadrado de lado igual a um. O conjunto potência clássico de X contém os seguintes conjuntos $2^X = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, X\}$. Estes conjuntos definem os vértices do quadrado e correspondem aos pontos (0,0), (1,0), (0,1) e (1,1), onde os uns e zeros indicam que um elemento pertence ou não ao conjunto. A Figura 2.33 mostra estes conjuntos representados como pontos.

Consideremos agora o conjunto nebuloso $A = \{(x_1, 3/8), (x_2, 6/8)\}$, mostrado na Figura 2.33. Neste conjunto, o elemento x_1 pertence ao conjunto A com grau de inclusão $\mu_A(x_1) = 3/8$, enquanto que x_2 pertence com grau $\mu_A(x_2) = 6/8$. O que seria então o conjunto de todos os subconjuntos nebulosos, isto é, o conjunto potência nebuloso $F(2^X)$? Este conjunto é um hipercubo unitário $I^n = [0, 1]^n$. Todo o espaço necessário para representar geometricamente conjuntos nebulosos pode ser definido por $\{X, I^n\}$. O espaço interior do cubo é preenchido pelo conjunto potência nebuloso de X.

O ponto central (C) do cubo é o conjunto com maior grau de nebulosidade, porque todos os seus elementos tem grau de inclusão igual a 1/2. Este ponto é totalmente incompatível com a

	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.0000	0.2459	0.2500	0.2500	0.2500
0.5000	0.0000	0.2500	0.4973	0.5000	0.5000
0.7500	0.0000	0.2500	0.5000	0.7486	0.7500
1.0000	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000

Tabela 2.21: AND de Yager para $k = 128$.

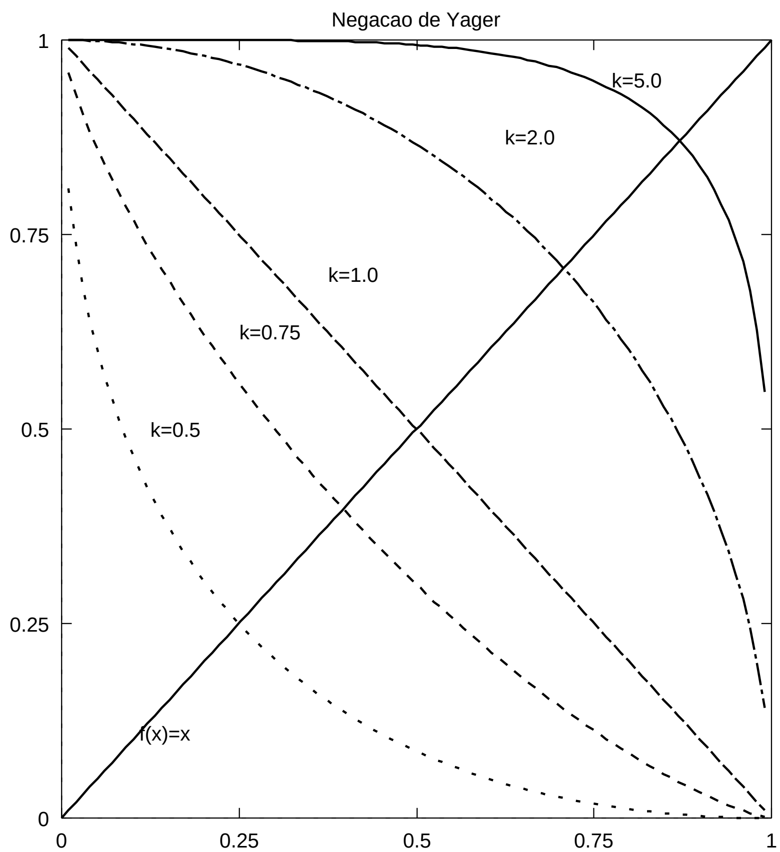

Figura 2.32: Gráficos mostrando a influência do parâmetro k na função de negação de Yager.

teoria dos conjuntos tradicionais, porque ele viola os princípios da não contradição e da exclusão do meio de Aristóteles. Neste ponto temos que

$$C = C \cap \overline{C} = C \cup \overline{C} = \overline{C} \tag{2.27}$$

Um interessante fato é o posicionamento relativo no espaço dos conjuntos resultantes da aplicação das operações de união, intercessão a um conjunto e seu complemento. Por exemplo, considere o conjunto A acima mencionado. Usando as operações de max, min para implementar as operações básicas sobre conjuntos temos que os conjuntos resultantes são

$$\begin{aligned} A &= (3/8, 6/8) \\ \overline{A} &= (5/8, 2/8) \\ A \cup \overline{A} &= (5/8, 6/8) \\ A \cap \overline{A} &= (3/8, 2/8) \end{aligned}$$

A Figura 2.34 mostra como estes pontos se distribuem no espaço. Estes pontos se movem em sincronia se afastando em direção aos conjuntos clássicos ou em direção ao ponto central onde ocorre a nebulosidade máxima. Segundo Kosko o ponto central corresponde ao buraco negro da lógica nebulosa, onde nada é distinguível (KOSKO, 1992). No ponto central temos que uma afirmação é equivalente a sua negação. Este ponto é a solução para os paradoxos do mentiroso de Creta, dos conjuntos de todos os conjuntos que não são membros de si mesmos, etc. Nestes paradoxos temos que uma afirmação A implica $\overline{A}$ e $\overline{A}$ implica A. Elas tem o mesmo grau de

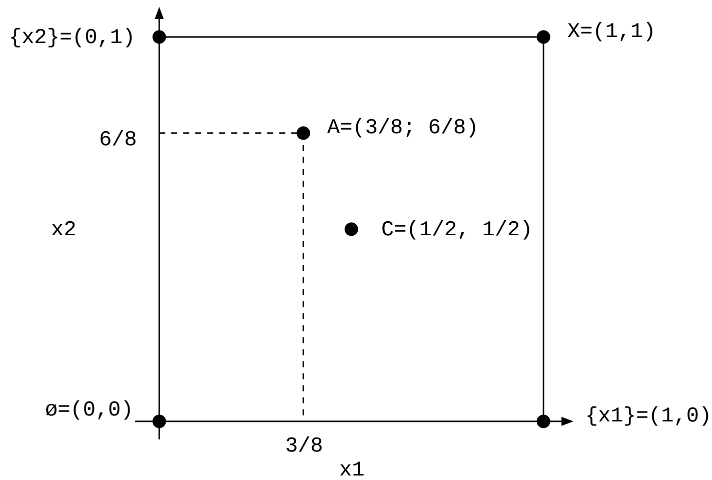

Figura 2.33: Conjuntos Representados como pontos.

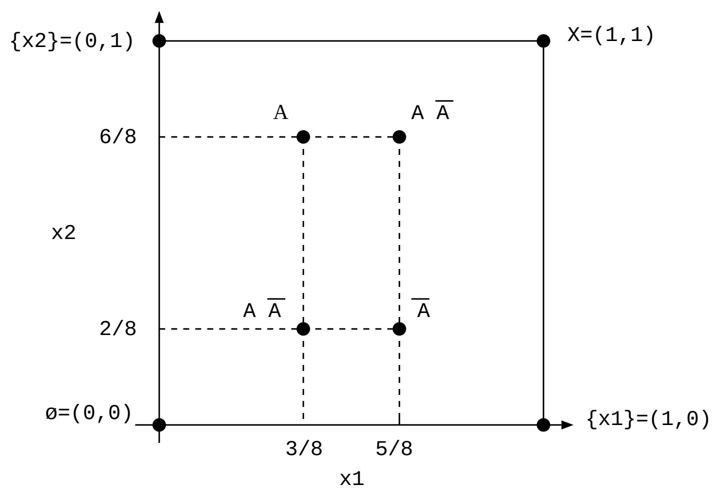

Figura 2.34: Princípios de Aristóteles no Espaço.

verdade e portanto podem ser entendidas como

$$\begin{aligned} V(A) &= V(\overline{A}) \\ V(A) &= 1 - V(A) \\ V(A) &= 1/2 \end{aligned}$$

A cardinalidade de um conjunto clássico conta quantos elementos pertencem a este conjunto. Para conjuntos nebulosos a definição 2.15 mostra que a cardinalidade de um conjunto nebuloso é a soma dos graus de inclusão de cada um dos elementos do conjunto. A cardinalidade do conjunto $A = (3/8, 6/8)$ é igual a $|A| = 3/8 + 6/8 = 9/8$. A medida da cardinalidade também tem uma interpretação geométrica consistente. Ela é igual ao tamanho do vetor que começa na origem e termina no conjunto A, como está ilustrado na Figura 2.35.

Para comprovar esta interpretação vamos considerar a fórmula de Minkowsky para calcular a distância entre dois pontos $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ e $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ é dada por

$$d(P,Q) = (\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|^t)^{\frac{1}{t}} \tag{2.28}$$

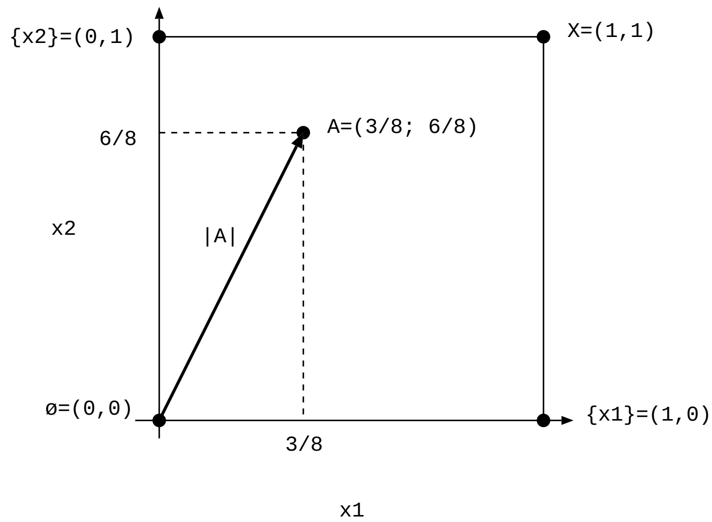

Figura 2.35: Cardinalidade como Vetor.

onde n é o número de coordenadas do ponto e t é o tipo de distância a ser calculada. Quando $t = 1$ temos a distância de Manhattan e para $t = 2$ temos a distância Euclideana. A distância de Manhattan pode também ser chamada de distância de Hamming nebulosa. A distância de Hamming nebulosa entre um conjunto $A = (x_1, \mu(x_1)), (x_2, \mu(x_2)), \ldots, (x_n, \mu(x_n))$ e a origem, ou o conjunto vazio ($O = 0, 0, \ldots, 0$ e dada por

$$\begin{aligned} d(A, O) &= \sum_{i}^{n} |\mu_A(x_i) - 0| \\ d(A, O) &= \sum_{i}^{n} |\mu_A(x_i)| \\ d(A, O) &= |A| \end{aligned} \tag{2.29}$$

Capítulo 3

Relações Clássicas e Relações Nebulosas

3.1 Introdução

Uma relação implica em uma associação entre elementos de diferentes conjuntos. Se o grau de associação entre os elementos é 0 ou 1 então temos uma relação clássica. Caso este grau possa variar entre 0 e 1, temos uma relação nebulosa.

A relação entre os elementos pode se dever a uma propriedade comum, uma qualidade, uma regra, etc. Uma sentença tal como "x é maior que y" indica uma relação entre dois valores. Observar que a ordem entre os elementos é importante. Por exemplo, "esta função é um dos componentes do programa", somente vale nesta ordem.

Uma relação do tipo "o resistor é um dos componentes do rádio" pode ser substituída pela regra "se o objeto é um resistor então ele é componente do rádio". Quando dois elementos pertencem a uma relação R, nós nos referenciamos a eles como o par ordenado $(a, b) \in R$, ou aRb, com o elemento a sendo o primeiro e o elemento b sendo o segundo. Uma relação de n elementos é chamado de uma relação n-ária, e a associação destes n elementos na relação é uma n-upla. Uma relação é qualquer conjunto de n-uplas ordenadas. Relações são formadas de conjuntos de elementos e elas são em si mesmas conjuntos.

Relações podem ser pensadas como mapeamentos. Funções são também mapeamentos, mas relações são mapeamentos de caracter mais geral. Uma função faz um mapeamento de muitos para um, isto é mais de um elemento do conjunto de origem podem ser mapeados em um único elemento do conjunto destino. Uma relação é um tipo de mapeamento mais geral do tipo que leva muitos para muitos, isto é podemos ter mais de um elemento do conjunto de origem levando para um elemento do conjunto destino e mais de um elemento do conjunto destino pode ser associado com um elemento do conjunto origem.

3.2 Produto Cartesiano

Uma seqüência ordenada de r elementos, escritos na forma $(a_1, a_2, \dots, a_r)$, é chamada uma n-upla ordenada. Considere os conjuntos clássicos $A_1, A_2, \dots, A_r$, o conjunto de todas as r-uplas $(a_1, a_2, \dots, a_r)$, onde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$,..., $a_r \in A_r$, e é denotado por $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$. Se todos os conjuntos A_i são iguais o produto Cartesiano pode ser abreviado como A^r. O produto Cartesiano não tem relação com o produto entre elementos dos conjuntos. O produto Cartesiano de dois universos X e Y é determinado da seguinte maneira

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\} \tag{3.1}$$

Exemplo 3.11: Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 1\}$. Podemos formar vários produtos Cartesianos a partir destes conjuntos. Por exemplo:
$A \times B = \{\{1, 0\}, \{2, 0\}, \{3, 0\}, \{4, 0\}, \{1, 1\}, \{2, 1\}, \{3, 1\}, \{4, 1\}\}$
$B \times B = \{\{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}\}$

3.3 Relações Clássicas

Uma relação é um subconjunto do produto Cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$. O produto Cartesiano pode ser considerado uma relação sem restrições, isto é, todos os elementos estão relacionados entre si sem nenhuma restrição. Uma relação entre dois conjuntos ($r = 2$), ou seja uma relação subconjunto do produto Cartesiano $A_1 \times A_2$ é chamada de relação binária. Quando $A_1 \neq A_2$ a relação binária é um grafo bipartido; quando $A_1 = A_2$ a relação é um grafo direcionado. Uma relação pode ser denotada por $R(A_1, A_2, \ldots, A_r)$, ou seja

$$R(A_1, A_2, \ldots, A_r) \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$$

A restrição ao relacionamento entre os pares, ou seja, a força da relação entre estes pares de cada Universo pode ser medida pela função característica μ, onde o valor 1 indica que os elementos estão relacionados e 0 mostra que não há relação, isto é

$$\mu_{X \times Y}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in X \times Y \\ 0, & (x, y) \notin X \times Y \end{cases} \tag{3.2}$$

Exemplo 3.12: Vamos considerar a relação de divisibilidade, R_d, no conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ definida pela afirmação "x divide y". $R_d \subset S \times S$, é uma relação binária clássica que envolve dois elementos x e y tirados do produto Cartesiano de S com ele mesmo. É fácil listar todos os pares da relação e verificar que a relação em si é um conjunto, o conjunto de todos os pares de números que dividem outro.

$$R_d = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\} \tag{3.3}$$

Uma relação pode ser representada de outros modos, por exemplo um grafo direcionado como está indicado na Figura 3.1. O conjunto x está à direita e o y à esquerda. Por exemplo, a seta que liga os círculos contendo os valores 1 e 2 indica que o valor 1 divide 2. A seta pode ser bidirecional para os casos em que a relação vale nos dois sentidos.

Outros modos de representar relações são tabelas e matrizes. A Tabela 3.1 mostra uma outra representação da mesma relação.

x \ y	1	2	3	4	6
1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	0	1	0	1
4	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1

Tabela 3.1: Tabela correspondente a Relação 3.3

A representação por meio de matrizes é um outro modo de mostrar relações. Esta tipo de matriz é chamada de matriz relação. A matriz relação correspondente a relação da Equação 3.3 foi obtida tirando-se a primeira linha e a primeira coluna e está mostrada na matriz, onde um 1

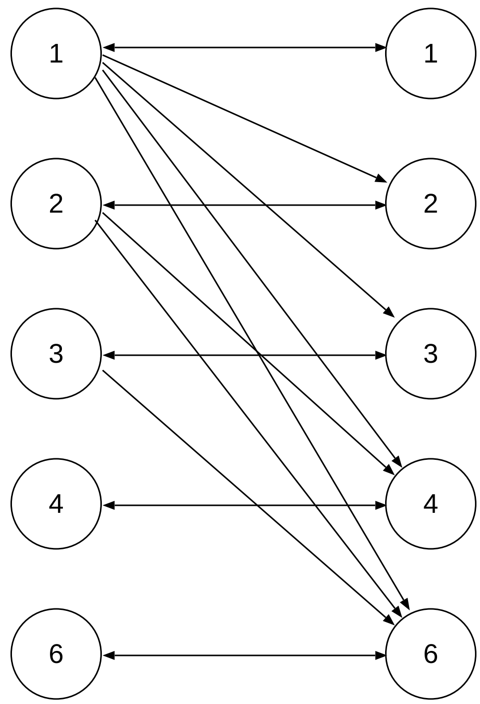

Figura 3.1: Grafo da relação 3.3

indica que x (da linha) divide y (da coluna).

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Relações podem ser definidas para universos contínuos. Por exemplo, seja a relação contínua definida pela expressão abaixo

$$R = \{(x, y) \mid y \geq x/2,\ x \in X,\ y \in Y\}$$

que pode ser definida pela sua função característica como

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & y \geq x/2 \\ 0, & y < x/2 \end{cases}$$

e que graficamente tem a forma mostrada na Figura 3.2.

3.3.1 Cardinalidade de Relações Clássicas

Suponha que n elementos do universo X estão relacionados com m elementos do universo Y. Se a cardinalidade de X é n_X e a cardinalidade de Y é n_Y, então a cardinalidade da relação R, entre estes dois universos é $n_{X \times Y}$=$n_X \times n_Y$. A cardinalidade do conjunto potência que descreve esta relação, $P(X \times Y)$, é $n_{P(X \times Y)} = 2^{(n_X n_Y)}$. Por exemplo, considere o conjunto $A = \{0, 1, 2\}$ e o conjunto $B = \{x, y\}$, a cardinalidade da relação que consiste de produto Cartesiano de $A \times B$ é igual a $3 \cdot 2 = 6$, e a cardinalidade do conjunto potência é $2^{3 \cdot 2} = 64$.

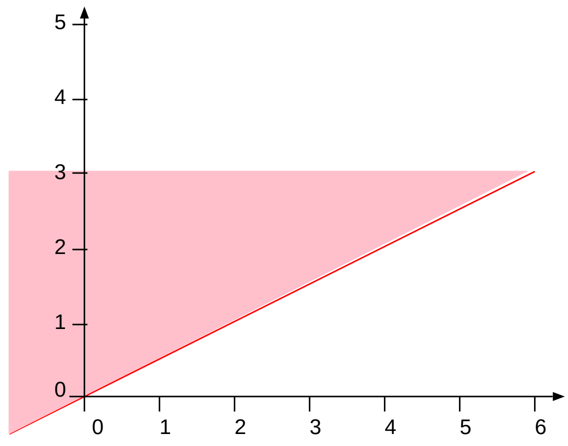

Figura 3.2: Gráfico da expressão $y = x/2$

3.3.2 Propriedades de Relações Binárias Clássicas

Seja S um produto Cartesiano de dois conjuntos X e Y ($S = X \times Y$) e x um elemento de X e y um elemento de Y. Consideremos R uma relação em S. Podemos usar o símbolo R de outro modo para representar relações. Por exemplo, podemos escrever xRy quando $(x, y) \in R(X, Y)$. Esta relação pode ter as seguintes propriedades:

Reflexiva: Uma relação R é reflexiva se para qualquer elemento x de S a relação xRx for válida, isto é o par (x, x) também pertencer a relação, ou seja $\mu_R(x, x) = 1$;

Anti-reflexiva: Uma relação é anti-reflexiva se não houver um elemento x em S para o qual xRx for válido, ou seja $\mu_R(x, x) = 0$;

Simétrica: Uma relação é simétrica se para todo x e y em S forem válidas as expressões xRy e yRx, ou seja $\mu_R(x, y) = 1$ e $\mu_R(y, x) = 1$;

Assimétrica: Uma relação é assimétrica se não houver elementos x e y em S para os quais as duas relações xRy e yRx forem expressões válidas;

Anti-simétrica: Uma relação é anti-simétrica se para todo x e y em S acontecer que se xRy e yRx forem válidos então $x = y$;

Transitiva: Uma relação é transitiva se para todo x, y, e z em S tivermos que se xRy for válido e yRz também válido então xRz é válido também, isto é se $\mu_R(x, y) = 1$ e $\mu_R(y, z) = 1$ então $\mu_R(x, z) = 1$;

Conectada: Uma relação é conectada quando para todo x e y em S o seguinte for verdade: Se $x \neq y$ então ou xRy é válido ou yRx é;

Única à esquerda: Uma relação é deste tipo quando para todo x, y e z em S tivermos que se xRz é válido e yRz também então $x = y$.

Única à direita: Uma relação é deste tipo quando para todo x, y e z em S tivermos que se xRy é válido e xRz também então $y = z$.

Bi-única: Uma relação que é única à esquerda e à direita é chamada de bi-única.

Exemplo 3.13: Seja R uma relação binária definida entre elementos de um mesmo conjunto, ou seja $R(X, X)$. Considere que o conjunto X seja o conjunto de disciplinas de um curso de graduação, e a relação R seja definida como é ***pré-requisito de*** . Podemos então dizer que esta relação é anti-reflexiva porque nenhuma disciplina é pré-requisito dela mesma. A relação também é transitiva por que se uma disciplina é pré-requisito de uma outra que por sua vez é pré-requisito de uma terceira então a primeira disciplina é obviamente um pré-requisito da terceira. Temos que se uma disciplina é pré-requisito de uma outra, o reverso nunca ocorrerá, portanto a relação é assimétrica.

3.3.2.1 Relações de Equivalência e Tolerância

Uma relação clássica binária $R(X, X)$ que é reflexiva, simétrica e transitiva é chamada de relação de equivalência. A Figura 3.3 mostra em forma de grafo relações reflexivas, simétricas e transitivas. Relações de equivalência são importantes em reconhecimento de padrões e controle. Para cada

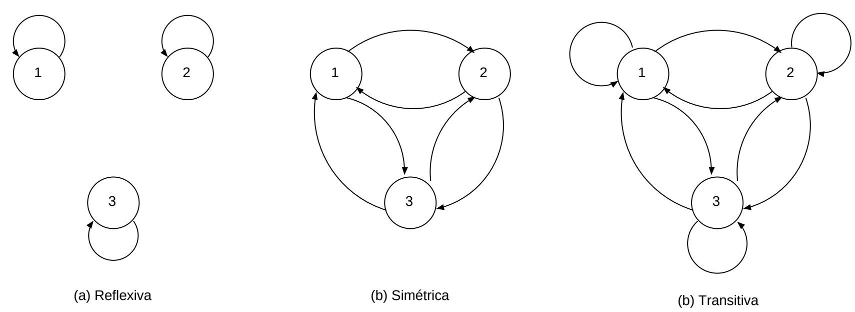

Figura 3.3: Grafos ilustrando as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

elemento $x \in X$, podemos definir um conjunto A_x, que contém todos os elementos y de X que são relacionados a x pela relação de equivalência. O conjunto A_x pode ser definido formalmente como

$$A_x = \{y \mid (x, y) \in R(X, X)\}.$$

O elemento x é parte de A_x devido a propriedade de reflexividade. Já que R é transitiva e simétrica, cada elemento de A_x é relacionado com cada um dos outros elementos. Nenhum elemento de A_xé relacionado com outro elemento que não esteja em A_x. Este conjunto é definido como uma classe de equivalência de $R(X, X)$ com respeito a x.

Exemplo 3.14: Vamos considerar a relação $R(X, X)$ no conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, definida como x e y têm o mesmo resto quando divididos por 3. Podemos listar todos os pares de números que compõem a relação, que são:

$$R = \{(1,1),(1,4),(1,7),(2,2),(2,5),(3,3),(3,6),(4,1),(4,4),(5,2),(5,5),(6,3),(6,6),(7,1),(7,4),(7,7)\}$$

Claramente esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva e portanto é uma relação de equivalência. As três classes de equivalência definidas para esta relação são as seguintes:

$$\begin{array}{lllllll} A_1 & = & A_4 & = & A_7 & = & \{1,4,7\} \\ A_2 & = & A_5 & = & \{2,5\} \\ A_3 & = & A_6 & = & \{3,6\} \end{array}$$

A Figura mostra o grafo que representa esta relação.

Uma relação de equivalência divide em grupos separados elementos que são equivalentes se levarmos em conta a definição da relação.

Relações, em um universo X, que apresentam as propriedades de reflexividade e simetria são chamadas de relação de tolerância ou de proximidade.

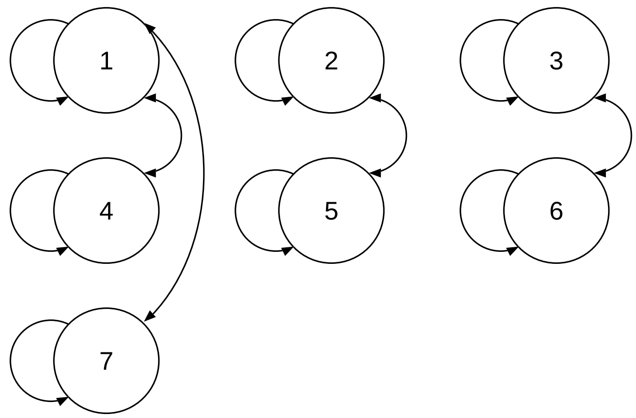

Figura 3.4: Grafo de uma relação de equivalência.

Exemplo 3.15: Suponha que em um circuito eletrônico é composto de cinco módulos interconectados. Um engenheiro está procurando dispor estes módulos em uma pastilha levando em conta fatores tais como: número de interconexões entre os módulos e com o mundo exterior, tamanho dos módulos, etc. Estes módulos podem ser enumerados como elementos do conjunto $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$. A relação entre estes módulos pode ser expressa pela relação

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta relação é reflexiva e simétrica e portanto uma relação de tolerância ou proximidade, e pode ser expressa no grafo mostrado na Figura . A Figura indica que os módulos 3 e 4 podem ser colocados livremente na pastilha por que o nível de interconexão entre eles e os outros módulos não é importante e não que eles não estão inter-conectados com os outros.

3.3.3 Operações com Relações Clássicas

Sejam R e S duas relações no universo Cartesiano $X \times Y$, e defina a relação nula e a relação completa como as matrizes relação O e E mostradas abaixo.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Um tipo especial de relação é a relação identidade (I), que relaciona cada elemento com ele mesmo. Para um universo Cartesiano $X \times X$ a relação identidade pode ser representado, por exemplo, pela matriz

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

A transposição de uma matriz relação (R^{-1}) fornece a matriz da relação inversa de R e é definida como

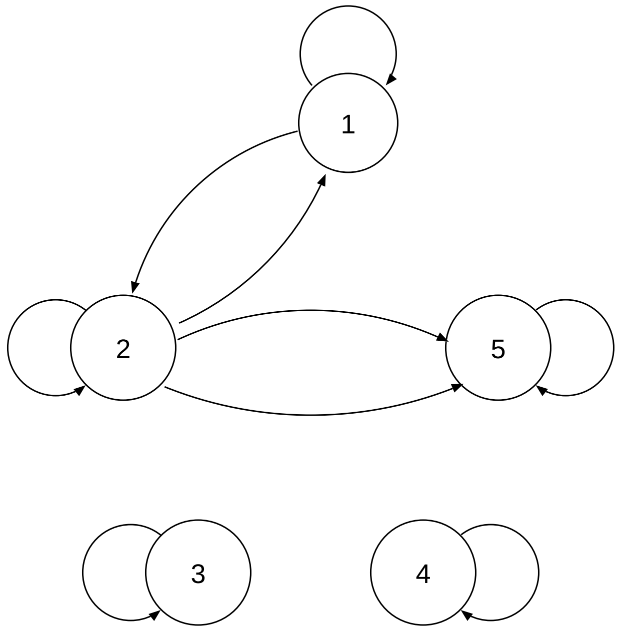

Figura 3.5: Grafo de uma relação de tolerância

$$\mu_{R^{-1}}(y,x) == \mu_R(x,y) \tag{3.7}$$

onde μ_R e $\mu_{R^{-1}}$ podem valer 0 ou 1.

$$(R^{-1})^{-1} = R \tag{3.8}$$

Então se a relação R é definida pela matriz relação 3.9

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \mu_R(x_1,y_2) & \cdots & \mu_R(x_1,y_n) \\ \mu_R(x_2,y_1) & \mu_R(x_2,y_2) & \cdots & \mu_R(x_2,y_n) \\ & & \vdots & \\ \mu_R(x_m,y_1) & \mu_R(x_m,y_2) & \cdots & \mu_R(x_m,y_n) \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

a relação inversa de R, que é R^{-1}tem a matriz relação3.10

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \mu_R(x_2,y_1) & \cdots & \mu_R(x_m,y_1) \\ \mu_R(x_1,y_2) & \mu_R(x_2,y_2) & \cdots & \mu_R(x_m,y_2) \\ & & \vdots & \\ \mu_R(x_1,y_n) & \mu_R(x_2,y_n) & \cdots & \mu_R(x_m,y_n) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Podemos definir as seguintes operações entre relações clássicas:

União: $R \cup S \rightarrow \mu_{R\cup S} = \mu_R(x,y) \vee \mu_S(x,y)$

Intersecção: $R \cap S \rightarrow \mu_{R\cap S} = \mu_R(x,y) \wedge \mu_S(x,y)]$

Complemento: $\overline{R} \rightarrow \mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$

Contém: $R \subset S \rightarrow \mu_R(x,y) \leq \mu_S(x,y)$

Identidade: $\emptyset \rightarrow O$ e $X \rightarrow E$

Para estas operações com relações que acabaram definidas valem as seguintes propriedades:

Comutatividade: $R \cup S = S \cup R$, $R \cap S = S \cap R$

Associatividade: $R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T$, $R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T$

Distributividade: $R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$, $R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$

Involução: $R = \overline{\overline{R}}$

Idempotência: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

Identidade: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup X = X$

3.3.4 Composição de Relação Clássicas

Suponha que exista uma relação R que mapeia elementos de um universo X em um universo Y, e uma outra relação S que mapeia elementos do universo Y no universo Z.. Composição é a relação que mapeia os mesmos elementos de X nos mesmos elementos de Z, como está indicado na Figura 3.6. Há diversas maneiras de obter a composição de duas relações, sendo a mais comum

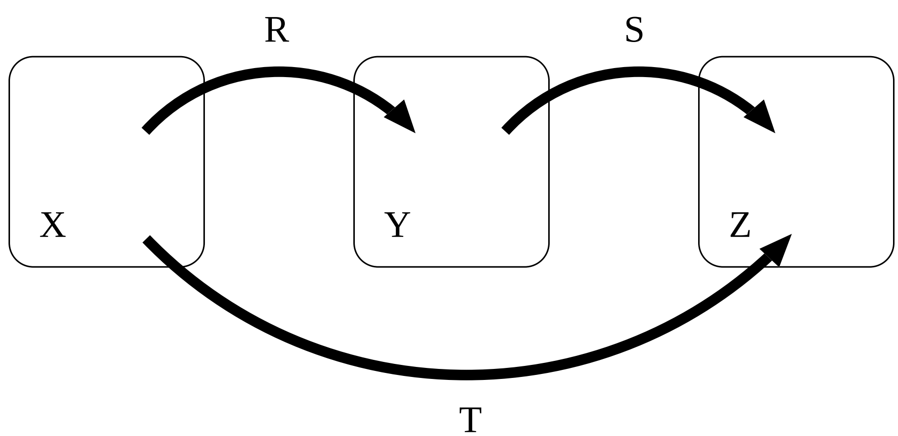

Figura 3.6: Composição de Relações

a chamada composição máximo-mínimo. Outras maneiras são encontradas são máximo-produto e máximo-média.

3.3.4.1 Composição Max-Min

A operação de composição de duas relações obtida a partir das operações de máximo e mínimo é maneira mais comum de se obter composição. A composição das relações R e S ($R \circ S$) é uma nova relação no produto Cartesiano $X \times Z$ definida pela fórmula

$$R \circ S = \int_{X \times Z} \max_y [\min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z))]/(x,z) \tag{3.11}$$

onde o símbolo $\circ$ significa a composição das relações R e S. Quando o produto Cartesiano é discreto o símbolo de união pode ser substituído pela soma e a fórmula fica

$$R \circ S = \sum_{X \times Z} \max_y [\min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z))]/(x,z) \tag{3.12}$$

da fórmula acima podemos verificar que o grau de inclusão de cada par de elementos na nova relação vale

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \max_y [min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z))]. \tag{3.13}$$

A operação de cálculo dos graus da inclusão dos elementos na relação é calculado de forma similar a uma multiplicação de matrizes onde a operação de mínimo corresponde a multiplicação e a de máximo a soma.

Exemplo 3.16:

Como exemplo deste cálculo vamos considerar as relações R e S que ligam os valores x_i aos valores y_i e os valores y_i aos valores z_i, mostradas na Figura 3.7, cujas matrizes de relação estão mostradas em 3.14 e 3.15 respectivamente.

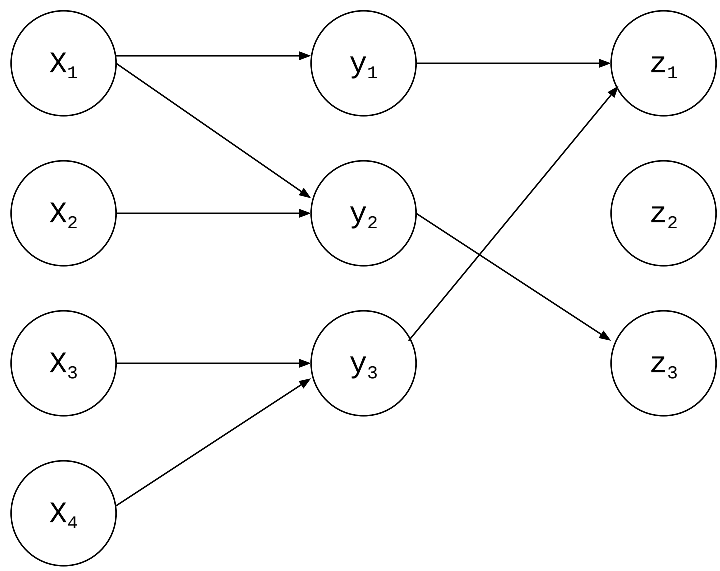

Figura 3.7: Relações R e S.

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \mu_R(x_1,y_2) & \mu_R(x_1,y_3) \\ \mu_R(x_2,y_1) & \mu_R(x_2,y_2) & \mu_R(x_3,y_3) \\ \mu_R(x_3,y_1) & \mu_R(x_3,y_2) & \mu_R(x_3,y_3) \\ \mu_R(x_4,y_1) & \mu_R(x_4,y_2) & \mu_R(x_4,y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

e

$$S = \begin{bmatrix} \mu_S(y_1,z_1) & \mu_S(y_1,z_2) & \mu_S(y_1,z_3) \\ \mu_S(y_2,z_1) & \mu_S(y_2,z_2) & \mu_S(y_2,z_3) \\ \mu_S(y_3,z_1) & \mu_S(y_3,z_2) & \mu_S(y_3,z_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

A composição entre estas duas relações utilizando-se a fórmula 3.13 fornece a seguinte matriz

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde ao diagrama da Figura 3.8. Observe os caminhos entre os pontos de origem e os de destino nas duas figuras (3.7 e 3.8) e verifique como eles estão relacionados da mesma maneira.

3.3.4.2 Composição Máximo-Produto

Neste tipo de composição a operação de produto substitui a função de mínimo. Deste modo a equação de composição fica

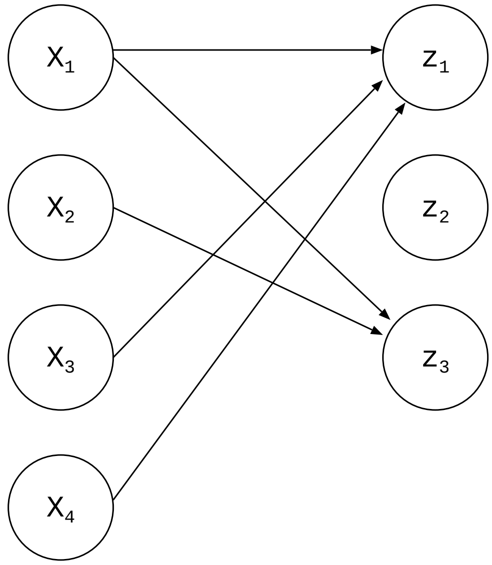

Figura 3.8: Diagrama da relação $R \circ S$

$$R \cdot S = \int_{X \times Z} \max_y [\mu_R(x,y) \cdot \mu_S(y,z)]/(x,z) \tag{3.16}$$

Para universos discretos o sinal de integração é substituído pelo sinal de somatório. O valor da função de inclusão da relação de composição vale

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \max_y [\mu_R(x,y) \cdot \mu_S(y,z)] \tag{3.17}$$

3.3.4.3 Composição Máximo-Média

Na composição máximo-média a operação de mínimo é substituído pela média aritmética como está indicado na fórmula 3.18 abaixo

$$R <+> S = \int_{X \times Z} \max_y \{\frac{1}{2}[\mu_R(x,y) + \mu_S(y,z)]\}/(x,z) \tag{3.18}$$

e a função de inclusão vale

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \max_y \{\frac{1}{2}[\mu_R(x,y) + \mu_S(y,z)]\} \tag{3.19}$$

3.3.5 Relações Nebulosas

Em relações nebulosas os elementos podem estar relacionados parcialmente, assim como um elemento pode pertencer a um conjunto somente até um certo valor. Relações nebulosas são conjuntos nebulosos definidos em produtos Cartesianos de conjuntos clássicos, ou seja o Universo de Discurso deixou de ter somente uma dimensão (X) para ser multi-dimensional ($X \times Y \times Z \times \cdots$). Do mesmo modo que fizemos com conjuntos nebulosos podemos representar relações nebulosas mostrando os valores relacionados e o seu grau de relação como está indicado na equação 3.20, exemplo de relação binária .

$$R = \{(x,y), \mu_R(x,y)\} \tag{3.20}$$

Um modo de representar a relação é indicar cada uma das t-uplas da relação e seu grau de relação, isto é

$$R = \sum_{(x_i,y_i)\in X\times X} \mu_R(x_i,y_i)/(x_i,y_i) \tag{3.21}$$

onde o somatório indica que a relação R é formada pela união de todos os elementos $\mu_R(x_i,y_i)/(x_i,y_i)$. Para um produto Cartesiano contínuo teríamos

$$R = \int_{X\times Y} \mu_R(x,y)/(x,y) \tag{3.22}$$

Podemos também representar uma relação binária $m \times n$ por meio de uma matriz com a seguinte forma

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \mu(x_1,y_2) & \cdots & \mu_R(x_1,y_n) \\ \mu_R(x_2,y_1) & \mu_R(x_2,y_2) & \cdots & \mu_R(x_2,y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_R(x_m,y_1) & \mu_R(x_m,y_2) & \cdots & \mu_R(x_m,y_n) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

As relações nebulosas nula e completa O, E e I têm a mesma definição das relação clássicas indicadas nas matrizes das equações em 3.5 e 3.6respectivamente. Assim como relações clássicas têm relações inversas, as relações nebulosa têm as suas inversas definidas do mesmo modo. Portanto a transposição de uma matriz relação (R^T) fornece a matriz da relação inversa de R e é definida como

$$\mu_{R^T}(x,y) == \mu_R(x,y) \tag{3.24}$$

e

$$(R^T)^T = R \tag{3.25}$$

Então se a relação R é definida pela matriz relação 3.26

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \mu_R(x_1,y_2) & \cdots & \mu_R(x_1,y_n) \\ \mu_R(x_2,y_1 & \mu_R(x_2,y_2 & \cdots & \mu_R(x_2,y_n \\ & & \vdots & \\ \mu_R(x_m,y_1 & \mu_R(x_m,y_2 & \cdots & \mu_R(x_m,y_n \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

a relação inversa de R, que é R^Ttem a matriz relação3.27

$$R^T = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \mu_R(x_2,y_1) & \cdots & \mu_R(x_m,y_1) \\ \mu_R(x_1,y_2) & \mu_R(x_2,y_2) & \cdots & \mu_R(x_m,y_2) \\ & & \vdots & \\ \mu_R(x_1,y_n) & \mu_R(x_2,y_n) & \cdots & \mu_R(x_m,y_n) \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

3.3.6 Propriedades de Relações Nebulosas

Seja S um produto Cartesiano de dois conjuntos X e Y ($S = X \times Y$) e x um elemento de X e y um elemento de Y. Consideremos R uma relação nebulosa em S. Esta relação pode ter as seguintes propriedades:

Reflexiva: Uma relação R nebulosa é reflexiva se para qualquer elemento x de S a relação xRx for válida, isto é o par (x,x) também pertencer a relação, ou seja $\mu_R(x,x) = 1$;

Anti-reflexiva: Uma relação é anti-reflexiva se não houver um elemento x em S para o qual xRx for válido;

Simétrica: Uma relação é simétrica se para todo x e y em S forem válidas as expressões xRy e yRx;

Assimétrica: Uma relação é assimétrica se não houver elementos x e y em S para os quais xRy e yRx forem expressões válidas;

Anti-simétrica: Uma relação é anti-simétrica se para todo x e y em S acontecer que se xRy e yRx forem válidos então $x = y$;

Transitiva: Uma relação é transitiva se para todo x, y, e z em S tivermos que se xRy for válido e yRz também válido então xRz é válido também;

Conectada: Uma relação é conectada quando para todo x e y em S o seguinte for verdade: Se $x \neq y$ então ou xRy é válido ou yRx é;

Única à esquerda: Uma relação é deste tipo quando para todo x, y e z em S tivermos que se xRz é válido e yRz também então $x = y$.

Única à direita: Uma relação é deste tipo quando para todo x, y e z em S tivermos que se xRy é válido e xRz também então $y = z$.

3.3.7 Operações com Relações Nebulosas

Sejam R e S duas relações nebulosas no universo Cartesiano. Podemos definir as seguintes operações entre relações nebulosas:

União: $R \cup S \rightarrow \mu_{R \cup S} = \mu_R(x, y) \vee \mu_S(x, y)$

Interseção: $R \cap S \rightarrow \mu_{R \cap S} = \mu_R(x, y) \wedge \mu_S(x, y)$

Complemento: $\overline{R} \rightarrow \mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$

Contém: $R \subset S \rightarrow \mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$

Identidade: $\emptyset \rightarrow O$ e $X \rightarrow E$

Para estas operações com relações que acabaram definidas valem as seguintes propriedades:

Comutatividade: $R \cup S = S \cup R$, $R \cap S = S \cap R$

Associatividade: $R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T$, $R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T$

Distributividade: $R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$, $R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$

Involução: $R = \overline{\overline{R}}$

Idempotência: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

Identidade: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup X = X$

Como acontece com os conjuntos nebulosos, as relações nebulosas também não obedecem as leis da exclusão do meio e contradição, já que podemos ter sobreposição entre uma relação e o seu complemento. Deste modo temos que

$$R \cap \overline{R} \neq E \tag{3.28}$$

e

$$R \cup \overline{R} \neq O \tag{3.29}$$

Exemplo 3.17:

Suponha que nós temos as duas relações (R e S) indicadas nas Tabelas 3.30 e 3.31. O problema é calcular a União e Interseção entre estas relações. Isto é, se R corresponde à relação x é igual a y e S à relação x é maior que y, queremos obter $R \bigcup S$, que significa x é igual a y ou x é maior que y e $R \bigcap S$, que significa x é igual a y e x é maior que y. Devemos tomar cuidado com algumas destas operações pois elas podem resultar em dados que não tem significado semântico de real significado. No caso temos que o resultado da operação de interseção pode ser interpretado como x é igual a y em certa medida e também maior que y em certo grau.

$$R\,(x\,é\,igual\,a\,y) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.0 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 0.0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.30}$$

$$S\,(x\,é\,maior\,que\,y) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.31}$$

A união das relações R e S é formada escolhendo-se o maior valor dos dois graus de inclusão nas relações e a interseção a partir dos menores valores, obtendo-se os resultados mostrados nas matrizes 3.32 e 3.33.

$$R \cup S\,[(x\,igual\,y)\,OU\,(x\,maior\,y)] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.0 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 & 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 0.6 & 0.6 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.6 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.32}$$

$$R \cap S\,[(x\,igual\,y)\,E\,(x\,maior\,y)] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.33}$$

3.3.8 Composição de Relações Nebulosas

Suponha que exista uma relação R nebulosa que mapeia elementos de um universo X em um universo Y, e uma outra relação nebulosa S que mapeia elementos do universo Y no universo Z.. Composição é a relação que mapeia os mesmos elementos de X nos mesmos elementos de Z. Relações nebulosas podem ser compostas entre si para formar uma outra relação de diferentes maneiras. A operação principal quando estabelecemos composições é calcular os graus de inclusão na relação entre os elementos de X e de Z.

3.3.8.1 Composição Max-Min

A operação de composição de duas relações nebulosas obtida a partir das operações de max ($\vee$) e min ($\wedge$) é maneira mais comum de se obter composição. A composição das relações R e S ($R \circ S$) é uma nova relação no produto Cartesiano $X \times Z$ definida pela fórmula

$$R \circ S = \sum_{X \times Z} \bigvee_{y} [\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z)]/(x,z) \tag{3.34}$$

onde o símbolo $\circ$significa a composição das relações R e S. Quando o produto Cartesiano é discreto o símbolo de união pode ser substituído pela soma e a fórmula fica

$$R \circ S = \sum_{X \times Z} \bigvee_{y} [\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z)]/(x,z) \tag{3.35}$$

da fórmula acima podemos verificar que a função de inclusão de cada par de elementos na nova relação vale

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \bigvee_{y} [\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z)]. \tag{3.36}$$

A operação de cálculo dos graus da inclusão dos elementos na relação é calculado de forma similar a uma multiplicação de matrizes onde a operação de mínimo corresponde a multiplicação e a de máximo a soma. Este tipo de operação é largamente empregada em aplicações de controle que usam lógica nebulosa.

Exemplo 3.18:

Vamos considerar as duas relações R e S mostradas na Figura 3.9, cujas matrizes de inclusão são mostradas nas matrizes 3.37 e 3.38. Para encontrar a composição das relações $T = R \circ S$, vamos empregar a fórmula max-min de composição (3.36) para encontrar a matriz de inclusão que representa a relação T.

As matrizes R e S são as seguintes:

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \mu_R(x_1,y_2) & \mu_R(x_1,y_3) \\ \mu_R(x_2,y_1) & \mu_R(x_2,y_2) & \mu_R(x_2,y_3) \\ \mu_R(x_3,y_1) & \mu_R(x_3,y_2) & \mu_R(x_3,y_3) \\ \mu_R(x_4,y_1) & \mu_R(x_4,y_2) & \mu_R(x_4,y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 1.0 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

e

$$S = \begin{bmatrix} \mu_S(y_1,z_1) & \mu_S(y_1,z_2) & \mu_S(y_1,z_3) & \mu_S(y_1,z_4) \\ \mu_S(y_2,z_1) & \mu_S(y_2,z_2) & \mu_S(y_2,z_3) & \mu_S(y_2,z_4) \\ \mu_S(y_3,z_1) & \mu_S(y_3,z_2) & \mu_S(y_3,z_3) & \mu_S(y_3,z_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

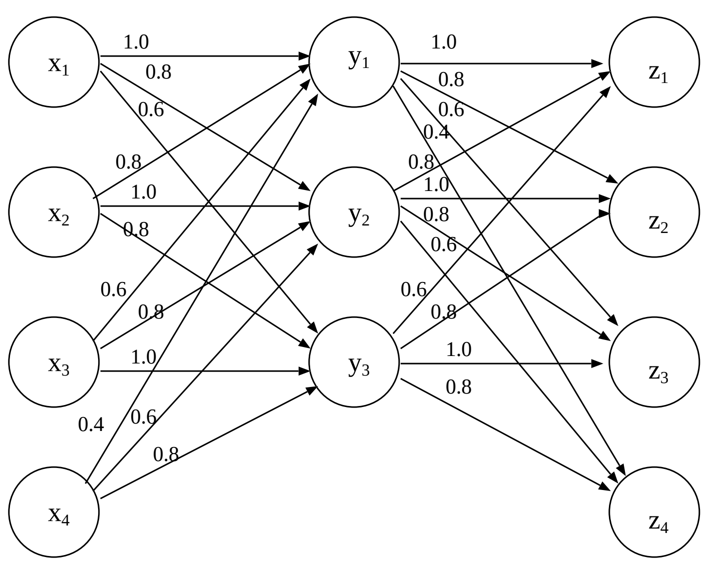

Figura 3.9: Relações R e S.

A composição destas duas relações fica igual então a

$$T = R \circ S = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

e o diagrama correspondente a esta relação está mostrado na Figura

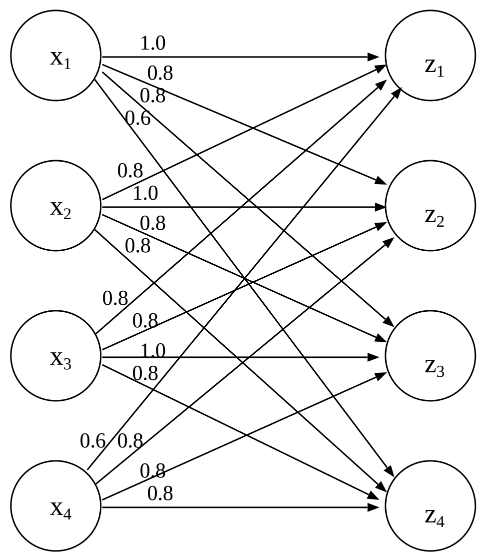

Figura 3.10: Diagrama da relação T

3.3.8.2 Composição Máximo-Produto

Neste tipo de composição a operação de produto substitui a função de mínimo. Deste modo a equação de composição fica

$$R \cdot S = \int_{X \times Z} \bigvee_y [\mu_R(x,y) \cdot \mu_S(y,z)]/(x,z) \tag{3.40}$$

Para universos discretos o sinal de integração é substituído pelo sinal de somatório. O valor da função de inclusão da relação de composição vale

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \bigvee_y [\mu_R(x,y) \cdot \mu_S(y,z)] \tag{3.41}$$

3.3.8.3 Composição Máximo-Média

Na composição máximo-média a operação de mínimo é substituído pela média aritmética como está indicado na fórmula 3.18 abaixo

$$R <+> S = \int_{X \times Z} \bigvee_y \{\frac{1}{2}[\mu_R(x,y) + \mu_S(y,z)]\}/(x,z) \tag{3.42}$$

e a função de inclusão vale

Capítulo 4

Variáveis Nebulosas

4.1 Variáveis Nebulosas Linguísticas

Para descrever a medida de um fenômeno do mundo real, como a faixa de renda de uma família, precisamos de juntar vários conjuntos nebulosos.

Por exemplo, para a renda da família teríamos de definir os conjuntos baixa, média e alta rendas. é importante notar que as definições dos conjuntos podem se sobrepor, permitindo que uma família seja classificada como pertencente a dois conjuntos, com graus de inclusão diferentes ou mesmo iguais. Este processo de definição inclui escolher as formas das funções de inclusão, isto é a semântica do conjunto. Outro ponto importante é definição do Universo de Discurso da variável.

Uma vez que cada conjunto e a sua forma seja definida temos a definição completa da variável nebulosa.

Vamos considerar um outro exemplo. A variável nebulosa temperatura (T) pode ser definida como o conjunto de termos

$$T = \{gelado, frio, normal, morno, quente\}$$

e cada um destes termos, que é um conjunto nebuloso, tem a sua função de inclusão definida como indicado na Figura 4.1.

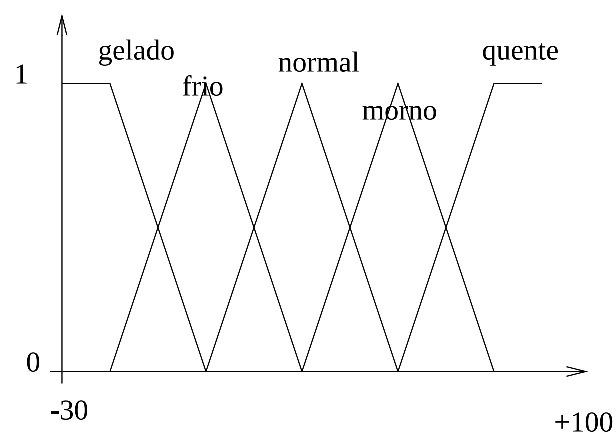

Figura 4.1: Variável nebulosa temperatura.

Definição 4.1 Variável Nebulosa: *Uma variável nebulosa é definida pela quádrupla:* $\{X, R, U, M\}$ *onde:*

X é o nome simbólico da variável, por exemplo, $idade$;

R é o conjunto de rótulos, isto é o conjunto de nomes da variável $idade$, por exemplo: $\{novo, velho, meia-idade\}$

U é o Universo de Discurso sobre o qual a variável está definida, por exemplo, 0 até 150;

M são as regras semânticas que indicam o significado de cada rótulo em R

Exemplo 4.19: Considere o exemplo da classificação dos bons alunos. Vamos agora fazer uma classificação que enquadre todos os alunos.

Neste caso teremos então a variável nebulosa $X = alunos$. O conjunto de termos ou rótulos da variável alunos é composto pelos seguintes termos

$$R = \{péssimos, ruins, médios, bons, excelentes\}$$

O Universo de Discurso sobre o qual X é definido está entre 0 e 10 e as regras semânticas para associar os significados, ou as funções de inclusão estão ilustradas na Figura 4.2.

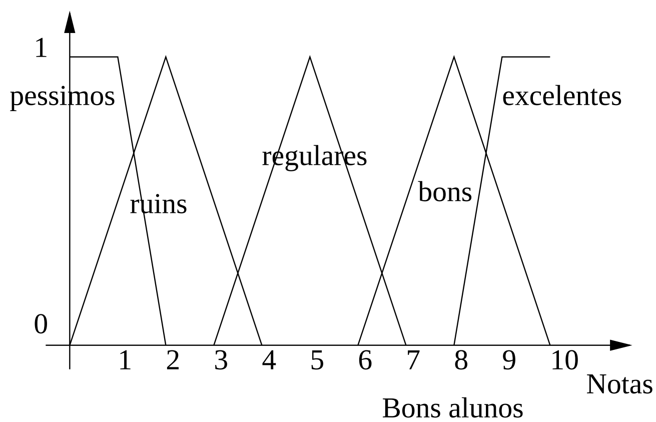

Figura 4.2: Variável nebulosa correspondente a classificação de um aluno em função de sua nota.

4.1.1 Terminologia de Variáveis

Da mesma maneira que os conjuntos nebulosos possuem um conjunto de propriedades importantes, as variáveis nebulosas também têm algumas propriedades importantes que precisam ser apresentadas.

Definição 4.2 Completude:
Uma variável nebulosa é completa se para cada $x \in X$ existe um conjunto nebuloso tal que:

$$\mu(x) > 0$$

Obviamente, quando uma variável nebulosa não é completa, há entradas para as quais não haverá interpretação lingüística há partir do conjunto de termos e portanto a saída de qualquer sistema que é baseado nestes termos será indefinida.

A Figura 4.3 mostra uma variável nebulosa completa e uma não completa.

Definição 4.3 Partição da Unidade: *A variável nebulosa forma uma em partição da unidade (algumas vezes chamada de partição nebulosa) se para cada entrada x*

$$\sum_{i=1} \mu_{A_i}(x) \equiv 1$$

onde p é o número de conjuntos nebulosos a que o valor x pertence.

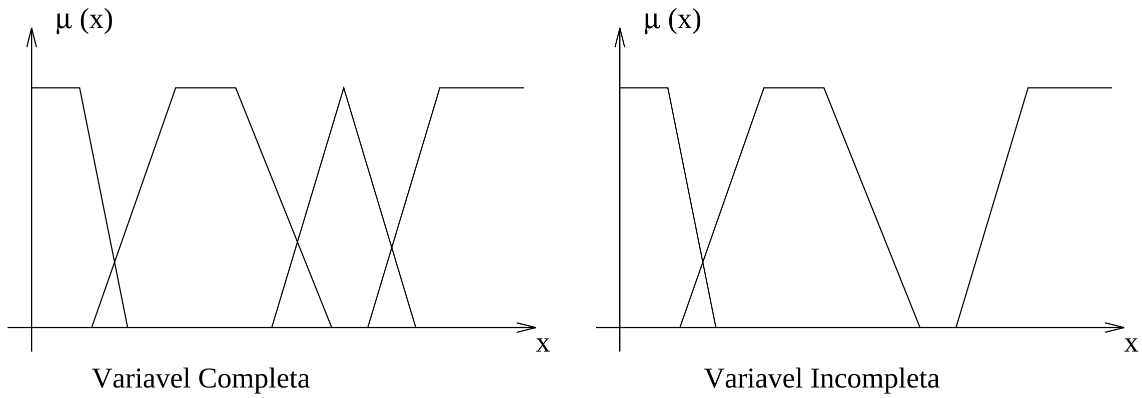

Figura 4.3: Variável nebulosa completa e não completa.

Esta é uma condição mais forte que *Completude* e condição suficiente para Completude é que a variável nebulosa forme uma partição da unidade.

A partição da unidade está associada com a sobreposição dos conjuntos nebulosos. A Figura 4.4 ilustra como dois conjuntos se sobrepõem. Observar que no ponto de máxima sobreposição o valor da soma dos valores das funções de inclusão é um.

Não há um algoritmo preciso para determinar o máximo ou mínimo grau de sobreposição , no entanto esta sobreposição deve refletir o mais corretamente possível a semântica da variável associada.

Esta sobreposição não é uma imposição da teoria da lógica nebulosa, mas deve refletir a realidade de cada um dos conjuntos envolvidos.

A experiência mostra que a sobreposição entre os conjuntos varia entre 25% e 50% das bases do conjunto. Na Figura 4.4 o grau de sobreposição vale 50%.

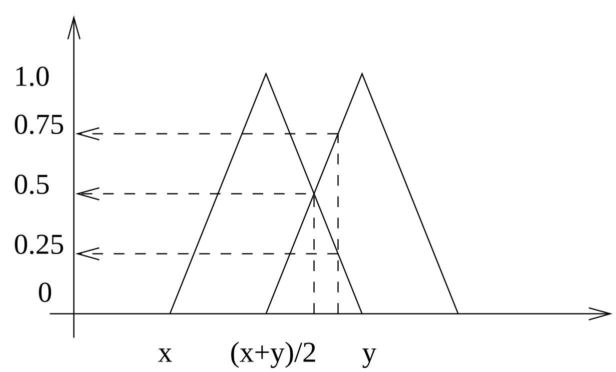

Figura 4.4: Sobreposição de 50% em conjuntos nebulosos.

Para um grau de sobreposição de 50%, o ponto onde ocorre o grau máximo de inclusão para um conjunto representa o ponto de mínimo grau de inclusão para os conjuntos vizinhos.

Qualquer variável nebulosa completa pode ser transformada em uma variável nebulosa que forma uma partição da unidade normalizando-se as funções de inclusão de acordo com a fórmula:

$$\mu_{\hat{A}_i}(x) = \frac{\mu_{A_i}(x)}{\sum_{j=1}^{p} \mu_{A_j}(x)} \tag{4.1}$$

para cada $i = 1, \ldots, p$.

Capítulo 5

Sistemas de Inferência Nebulosos

5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores vimos as definições básicas de lógica de nebulosa, aprendemos a operar com conjuntos nebulosos. Vimos como podemos escolher entre diferentes maneiras de executar as operações sobre conjuntos. Neste capítulo iremos mostrar como utilizar estes conceitos básicos para construir sistemas especialistas.

5.2 Conceitos Básicos de Sistemas Nebulosos

A base do pensamento nebuloso são as regras que estabelecem relações entre diversas variáveis nebulosas e uma ou mais regiões ou conjuntos nebulosos.

Estas regras são do seguinte tipo:

> A *temperatura* está *quente*.
>
> Se a *velocidade* está *muito alta* então *frear muito forte*.

Os termos em negrito são as variáveis e os conjuntos nebulosos.

Em termos gerais cada regra tem a forma

$$Se\, x_1\, é\, A_1^i\, AND\, \cdots\, AND\, x_n\, é\, A_n^i\, então\, y\, é\, B^j \tag{5.1}$$

Na equação 5.1 A_j^i indica o conjunto nebuloso i da variável nebulosa A_j e B^j é o conjunto nebuloso da variável de saída.

Um sistema nebuloso é então um conjunto de regras do tipo se-então que mapeia entradas (velocidade) em saídas (frear). Estas regras definem regiões no espaço entrada × saída ($X \times Y$). Um sistema nebuloso $F : X \to Y$ aproxima a função $f : X \to Y$ cobrindo seu gráfico com fragmentos ou remendos (\emph{patches}) que se sobrepõem. Cada regra determina um remendo. A aproximação da função melhora a medida que os fragmentos aumentam em número e diminuem em tamanho como está indicado na Figura \ref{f:frag}.

O conjunto de regras trata de conjuntos nebulosos (quente, alto, rápido, caro, etc), no entanto tanto as entradas do sistema como suas saídas são variáveis escalares. Por exemplo, o sistema recebe como informação uma temperatura de 35^o e não temperatura quente, ou altura de 1.73 cm e não altura média. A mesma coisa acontece na saída. O sistema de controle nebuloso deve fornecer um comando escalar e não um rótulo nebuloso. Por exemplo, a velocidade do motor deve ser 1200 rpm e não velocidade rápida. Por esta razão temos que inserir um módulo que nebulisa os valores de entrada e outro que transforma as respostas nebulosas em respostas escalares na saída. A Figura \ref{f:sisneb} mostra um diagrama em blocos de um sistema nebuloso.

Vamos considerar o exemplo de construir um sistema que controle a temperatura de um ambiente aumentando ou diminuindo a velocidade do motor do aparelho de ar-condicionado. Segundo

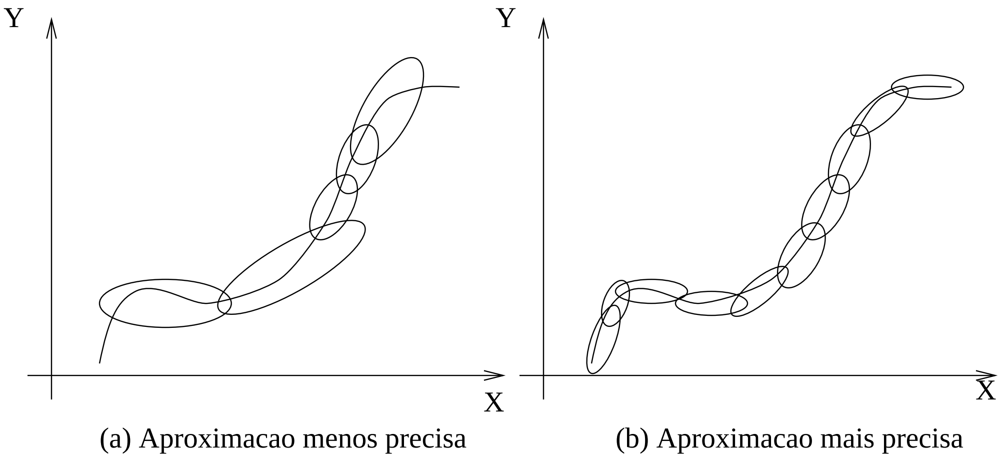

Figura 5.1: Gráficos mostrando como aumentar a precisão da aproximação nebulosa.

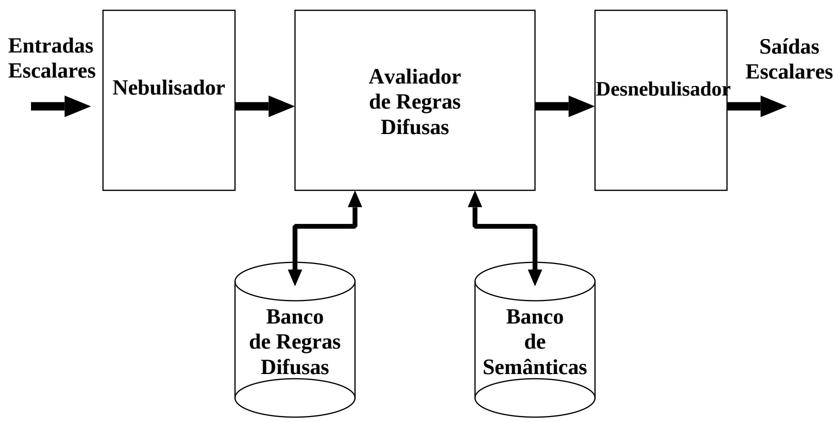

Figura 5.2: Diagrama em blocos de um sistema nebuloso.

a definição de variável nebulosa dada em \ref{d:varneb} o primeiro passo é criar as variáveis nebulosas. Para isto devemos definir as variáveis e seus nomes simbólicos. Neste exemplo teremos a variável nebulosa de entrada $temperatura$ que representa a temperatura ambiente do local a ser refrigerado e a de variável de saída $velocidade$ que representa a velocidade do motor do aparelho de ar-condicionado.

O próximo passo é definir os conjuntos nebulosos (rótulos) de cada uma destas duas variáveis, que são sub-conjuntos dos espaços de entrada e saída. Os rótulos que definem os conjuntos nebulosos das duas variáveis são os seguintes:

$$\begin{aligned} temperatura &= \{gelado, frio, normal, quente, fervendo\} \\ velocidade &= \{pare, lenta, média, rápida, disparada\} \end{aligned}$$

Os Universos de Domínio das variáveis temperatura e velocidade estão mostrados nas Figuras 5.3 e 5.4.

A seguir definimos a semântica de cada um dos conjuntos nebulosos, através de equações, gráficos ou enumeração . As Figuras 5.3 e 5.4 mostram as definições destes conjuntos.

Agora definimos as regras nebulosas. Neste conjunto de regras cada conjunto de temperaturas é associado com um conjunto de velocidades.

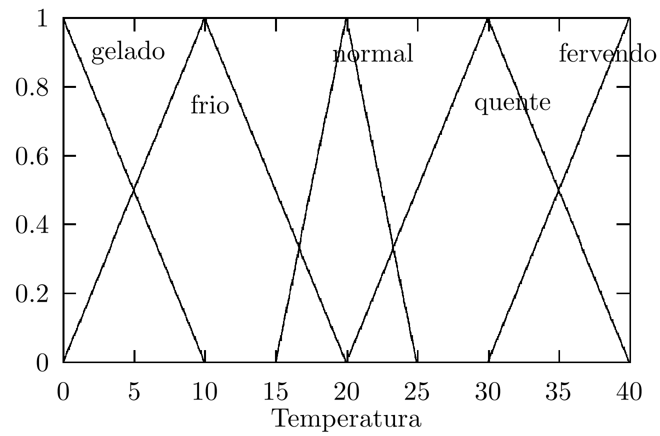

Figura 5.3: Conjuntos nebulosos que definem a temperatura.

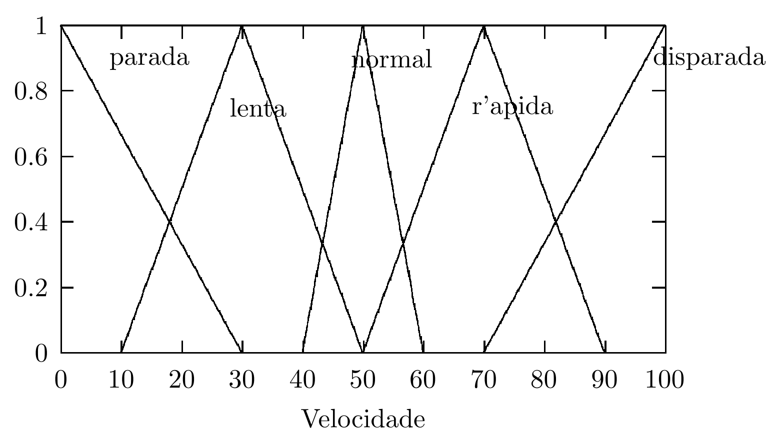

Figura 5.4: Conjuntos nebulosos que definem a velocidade.

Capítulo 6

Sistemas Híbridos Inteligentes

Se o homem pensa em criar computadores que o substituam deve olhar para si mesmo. O ser humano processa informações de maneira h íbrida.

Computadores atuais, que utilizam lógica booleana, nãoo passam de máquinas de calcular glorificadas, incapazes de se adaptar, de raciocinar com dados imprecisos e de aprender com a experiência.

O ser humano utiliza várias formas de processamento, recebem informações de formatos diferentes e de vários tipos.

Os sistemas de computação somente poderão almejar atingir alguma forma de processamento mais inteligente caso incorporem estas capacidades.

Os sistemas inteligentes procuram incorporar mais inteligência aos computadores utilizando formas de processamento que emulam algumas destas caracter ísticas.

Por exemplo, os sistema nebulosos processam informações vagas ou mesmo definidas incompletamente. Eles são inspiradas na forma como os seres humanos fazem afirmações vagas do tipo

> O dia está muito quente hoje, aumente a força do ar condicionado.

Redes neurais são inspiradas no funcionamento das células nervosas do cérebro humano. Elas tem a incrível capacidade de aprender com a experiência e são boas em reconhecer e classificar padrões.

Os algoritmos genéticos são baseados na lei da seleção natural, de sobrevivência do mais apto. Não é correto, como muitos enunciam esta lei, afirmar que sobrevivem os mais fortes. Sobrevivem os que são mais adaptados a superar determinadas dificuldades, e estes nem sempre são os mais fortes. Algoritmos genéticos procuram testar diversas soluçes, procurando encontrar a que melhor se adapte ao problema, exatamente como ocorre na natureza.

Como pode ser visto, cada uma das técnicas tem características particulares e são adaptadas a determinada classe de problemas. Estas técnicas tem também tem desvantagens que as fazem incapazes de encontrar soluções para determinados problemas.

Os pesquisadores têm voltado sua atenção para sistemas híbridos onde estas técnicas combinadas como forma de superar dificuldades individuais de cada técnica.

6.1 Características de Sistemas Inteligentes

No livro (GOONATILAKE; KHEBBAL, 1995) Sistemas Inteligentes são analisados de acordo com quatro características principais: aquisição de conhecimentos, capacidade de explicação, baixo e alto nível de raciocínio e fragilidade.

6.1.1 Aquisi ção de Conhecimentos

Adquirir conhecimentos é uma parte importante no processo de desenvolvimento de qualquer Sistema Inteligente e envolve extrair, interpretar e representar o conhecimento de um determinada área. Esta aquisição de conhecimentos exige tempo e é potencialmente não confiável. Os especialistas acham difícil traduzir em palavras determinados tipos de conhecimentos além não serem auxiliares cooperativos.

Por exemplo, é difícil para um especialista explicar como estacionar um caminhão articulado.

Além desses fatores, especialistas podem não dispor de todo o conhecimento.

Para resolver estes problemas um sistema especialista deve usar redes neurais, que são capazes de aprender a partir de dados que existem sobre o problema.

6.1.2 Fragilidade

Sistemas especialistas têm sido aplicados com relativo sucesso em alguns casos. No entanto, muitos destes casos tem um dom ínio restrito e os sistemas são incapazes de se adaptar caso ocorra alguma modifica ção no ambiente onde ele deve atuar. Holland (HOLLAND, 1986) cunhou o termo Fragilidade (*Brittleness*) para este fenômeno. Fragilidade pode ser visto como a inabilidade dos sistemas de trabalhar com conhecimento inexato, incompleto e inconsistente.

Em sistemas especialistas conhecimento é representado por s ímbolos discretos e tratado por meio de expressões lógicas booleanas. Este tipo de tratamento é inadequado para resolver problemas da vida real, onde o conhecimento é nebuloso.

Lógica nebulosa trata este problema incorporando a nebulosidade na sua lógica. Não há limites rig ídos entre as definições dos conceitos e as operações lógicas são redefinidas de maneira que é poss ível raciocinar utilizando afirmações que são vagas e imcompletas.

Redes neurais resolvem o problema do Fragilidade distribuindo o conhecimento por toda a rede. Nenhuma parte é responsável por tomar uma a decisão, mas o conjunto das células que compõem a rede toma a decisão. Esta distribuição do conhecimento permite que a rede possa tomar decisões sobre informacoes incompletas bem como continuar a funcionar mesmo quando partes de sua estrutura deixam de operar.

No caso de algoritmos genéticos, Holland defende que eles podem superar o problema mantendo uma população de solu\coes, onde cada uma descreve uma parte do problema. A escolha da solução depende da história do problema.

6.1.3 Baixo e Alto N ível de Raciocínio

Sistemas especialistas são capazes de fornecer modelos que tratam tarefas que envolvem alto nível de raciocínio. Em contraste redes neurais são capazes de executar tarefas t ípicas de baixo n ível de raciocínio tais como classificação de padrões.

6.1.4 Capacidade de Explicacão

A capacidade de fornecer explicações sobre como a resposta fornecida foi obtida é importante em muitos problemas.

Alguns estados americanos garantem ao cliente o direito de saber porque teve sua proposta de seguro recusada. Em alguns pa íses garantem que tomadores de empréstimos devem ser informados sobre os detalhes das decisões relativas aos seus pedidos. Sistemas inteligentes aplicados à medicina devem fornecer garantias aos seus usuários sobre os métodos de decisão empregados.

Neste caso, sistemas implementados com redes neurais não poderiam se empregados, já que é dif ícil extrair regras a partir de sua estrutura. Alguns pesquisadores [gal88] estão tentando criar métodos que permitam extrair regras a partir dos pesos das estruturas internas.

Outra razão é que pode ser importante que os projetistas entendam se o racioc ínio empregado está correto.

Em sistemas nebulosos decisões são tomadas a partir de regras simples do tipo IF-THEN e os usuários podem facilmente verificar quais delas foram atividas e com que peso elas contribu íram para a solu ção final.

A tabela 6.1 mostrada em (GOONATILAKE; KHEBBAL, 1995) ilustra as propriedades computacionais de cada um dos sistemas apresentados.

Tecnologia	Aquisição Automática	Fragilidade	Alto N ível de Raciocínio	Baixo N ível de Raciocínio	Explicacoes
Sist Especialistas					
Sist Nebulosos					
Redes Neurais					
Alg Genéticos					

Tabela 6.1: Funções Booleanas Convencionais.

Referências Bibliográficas

ARISTóTELES. **Metafísica**. Porto Alegre, Brasil: Editora Globo, 1969. (Biblioteca dos Séculos).

GOONATILAKE, S.; KHEBBAL, S. Intelligent hybrid systems: Issues, classifications and future directions. In: GOONATILAKE, S.; KHEBBAL, S. (Ed.). **Intelligent Hybrid Systems**. Chichester, West Sussex, Inglaaterra: John Wiley & Sons, 1995.

HOLLAND, J. Escaping brittleness. In: MICHALSKI, R.; CARBONELL, J.; MITCHELL, T. (Ed.). **Machine Learning**. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 1986. v. 2.

KOSKO, B. **Neural Networks and Fuzzy Systems**. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1992.

KOSKO, B. **Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic**. USA: Harper and Collins, 1994.

KOSKO, B. **Fuzzy Engineering**. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1997.

MAMDANI, E. H. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. **IEEE Transactions on Computers**, C-16, n. 12, p. 1182–1191, December 1977.

RUSSEL, B. Vagueness. **Australian Journal of Philosophy**, v. 1, 1923.

YEN, J.; LANGARI, R. **Fuzzy Logic: Intelligence, Control and Information**. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1999.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, p. 338–353, 1965.

ZADEH, L. A. Aspects of network and system theory. In: _____. [S.l.]: Rinehart and Winston, 1971. cap. Toward a Theory of Fuzzy Systems.

ZIMMERMANN, H. J. **Fuzzy Set Theory - and its Applications**. Boston, EUA: Kluwer-Nijhoff Publishing, 1985.